El principi del colomer

El *principi del colomer*, o *de les caselles* o *de Dirichlet*, és l'observació òbvia que si heu de repartir n coloms en m gàbies i $m < n$, qualque gàbia haurà de contenir més d'un colom. Més en general, si heu de repartir n coloms en m gàbies i $n > k \cdot m$, qualque gàbia haurà de contenir més de k coloms.

1) Tenim una bossa amb 50 bolles blanques i 50 bolles negres. Quin és el nombre mínim de bolles que hem de treure per garantir que en traurem 3 de blanques? I quin és el nombre mínim de bolles que hem de treure per garantir que en traurem 3 del mateix color?

2) Demostrau que, en qualsevol classe de 13 estudiants, sempre n'hi ha com a mínim 7 del mateix sexe.

3) Demostrau que, en qualsevol grup de 13 persones, sempre n'hi ha com a mínim 2 de nascudes el mateix mes (possiblement de diferents anys).

4) Demostrau que a Palma hi ha com a mínim 2 persones amb el mateix nombre de cabells.

5) Demostrau que en un conjunt de 11 nombres naturals, sempre n'hi ha dos que difereixen en un múltiple de 10.

6) Demostrau que en un conjunt de 13 nombres naturals, sempre n'hi ha dos tals que la diferència és un múltiple de 12.

7) Demostrau que, en un conjunt A de $n+1$ nombres naturals, sempre hi ha com a mínim dos nombres $a, b \in A$ tals que $a - b$ és divisible per n.

8) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té dues potències diferents tals que la seva diferència és divisible per 2013.

9) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té un múltiple format per una seqüència d'uns seguida d'una seqüència de zeros.

10) Demostrau que qualsevol subconjunt de $2n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ sempre conté tres nombres consecutius.

11) Sigui $C = \{r_1, \dots, r_{n+1}\}$ un conjunt qualsevol format per $n+1$ nombres reals r_i tals que $0 \leq r_i < 1$. Demostrau que hi ha com a mínim dos elements r_i, r_j de C tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

---

12) Donats 12 nombres diferents de 2 xifres, sempre n'hi ha dos tals que la seva diferència és un nombre de 2 xifres de la forma aa.

13) Demostrau que 2013 té un múltiple de la forma $111\dots1$.

14) Siguin a, d, n nombres naturals tals que cap dels nombres $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ no és divisible per n. Demostrau que d i n no són coprimers (que no tenen cap divisor primer en comú).

15) Demostrau que, donats 8 nombres naturals entre 1 i 15, sempre n'hi ha tres parelles que tenen la mateixa diferència (positiva).

16) Demostrau que tot conjunt de 10 nombres naturals conté qualque subconjunt no buit tal que la seva suma és un múltiple de 10.

17) Demostrau que si escrivim els nombres $1, 2, \dots, 10$ en un cercle, en l'ordre que vulguem, sempre n'hi ha 3 de consecutius que sumen 17 o més.

18) Demostrau que, donats 5 punts sobre una esfera, sempre existeix un hemisferi tancat (que conté el corresponent meridià) que en conté com a mínim 4.

19) Sigui $A = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100\} = \{3k + 1 \mid k = 0, \ldots, 33\}$. Demostrau que si prenem 20 nombres d'aquest conjunt, sempre n'hi haurà dos de diferents que sumen 104.

20) Demostrau que qualsevol subconjunt de $n + 1$ nombres extrets de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ conté qualque parella de nombres diferents tal que un divideix l'altre.

21) Demostrau que per qualsevol n sempre hi ha una potència de 2013 que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

22) Seleccionam 340 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau que podem situar un cub petit de costat de longitud 1 dins el cub gran de tal manera que no contingui cap dels punts seleccionats.

23) Seleccionam 350 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau sempre n'hi ha dos que estan a distància menor que 1.75.

24) Sigui S un conjunt qualsevol de k nombres naturals, tots $\leq n$, i suposem que $k > (n+1)/2$. Demostrau que existeixen $a, b \in S$ (poden ser iguals) tals que $a + b \in S$.

25) Tenim 6 persones que poden haver parlat o no per telèfon. Demostrau que o n'hi ha 3 que han parlat cada una d'elles amb les altres dues, o n'hi ha 3 que cap d'elles no ha parlat amb cap altra d'elles.

26) Demostrau que tot nombre de 16 xifres conté una seqüència de una o més xifres consecutives el producte de les quals és un quadrat perfecte.

27) Quin és el nombre màxim de reis que podem situar en un escaquer de manera que no n'hi hagi cap parella que s'amenacin mútuament?

28) En un torneig de n jugadors que es desenvolupa al llarg d'un mes, cada un juga amb tots els altres exactament una vegada. Cada partida es juga quan va bé als dos jugadors, sense calendari fixat. Demostrau que, en qualsevol moment del mes, hi ha sempre dos jugadors que han jugat el mateix nombre de partides.

29) Escollim 20 nombres naturals entre 1 i 69. Demostrau que entre les seves diferències hi ha com a mínim 4 nombres iguals.

30) Sigui S un conjunt de 10 nombres de 2 xifres. Demostrau que sempre podem escollir dos subconjunts disjunts de S tals que les sumes de llurs elements són les mateixes.

31) Siguin $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ dues reordenacions dels nombres $1, 2, \ldots, 100$. Demostrau que entre els productes $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{100}b_{100}$ sempre n'hi ha dos amb el mateix residu mòdul 100.

32) Dins un conjunt de 52 nombres naturals qualssevol, sempre hi ha almenys una parella tal que la seva suma o la seva diferència és divisible per 100.

33) Escrivim els nombres 1 a 101 en l'ordre que volguem. Demostrau que sempre en podem esborrar 90 de manera que els 11 que queden formin una seqüència creixent o decreixent.

34) Una societat internacional té membres de 6 països diferents. La llista dels seus membres té 2012 noms, i els numeram 1,2,..., 2012. Demostrau que hi ha qualque membre tal que el seu nombre és o bé la suma de dos nombres de membres del seu país, o el doble del nombre d'un membre del seu país.