Sessions de preparació

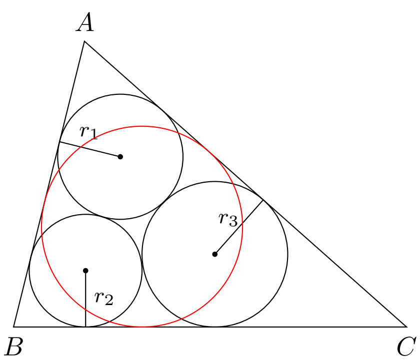
Desigualtats geomètriques

Miquel Amengual Covas

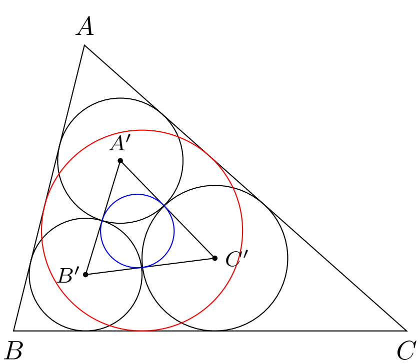
1. Configuració de Malfatti.

   En els dos problemes següents, r indicarà el radi de la circumferència inscrita en el triangle ABC. Designarem per A', B', C' els centres de les circumferències mútuament tangents de la *configuració de Malfatti* els radis de les quals designarem per r_1, r_2, r_3.

   1.1. Demostrau que
   $$r \leq \frac{(r_1 + r_2 + r_3)\left(3 + \sqrt{3}\right)}{9},$$
   i, a més, que la igualtat només val si $r_1 = r_2 = r_3$.



   1.2. Si indiquem per r' el radi de la circumferència inscrita en $\triangle A'B'C'$, volem provar la desigualtat
   $$r \geq \left(1 + \sqrt{3}\right) r'$$
   i, a més, que la igualtat es compleix només quan $r_1 = r_2 = r_3$.



2. Demostrau que si a, b i c són les longituds dels costats d'un triangle, aleshores es compleix que

   2.1. $\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{b}{c}-\frac{c}{b}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right|<1$

   2.2. $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{8}$

   2.3. $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

   2.4. $\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geq 3$

   2.5. $\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq 3$

   2.6. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}$

   2.7. $\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$
   Provau també que la constant 2 és òptima, és a dir, la més petita possible que garanteix la desigualtat en tots els casos.

   2.8. $\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$

   2.9. $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}\geq 7$

   2.10. $(5a-b-c)\,(5b-c-a)\,(5c-a-b)\leq(a+b+c)^3$

   2.11. $(b+c)^2\,(s-b)\,(s-c)\leq a^2bc$, essent s el semiperímetre del triangle.

   2.12. $8<\frac{(a+b+c)\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right)}{abc}\leq 9.$
   Provau també que la constant 8 és òptima, és a dir, la més gran possible que garanteix la desigualtat en tots els casos.

   2.13. $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

   2.14. $\frac{a+b}{2c}\,(a-b)^2+\frac{b+c}{2a}\,(b-c)^2+\frac{c+a}{2b}\,(c-a)^2\geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

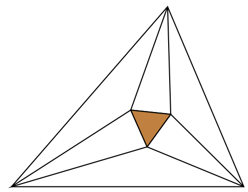
   2.15. $\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2c+2a-b}+\frac{c}{2a+2b-c}\geq 1$

   2.16. $\frac{a-b}{a-b+c}+\frac{b-c}{b-c+a}+\frac{c-a}{c-a+b}\leq 0$

   2.17. $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)+4abc}{(a+b+c)^3}\geq\frac{13}{27}.$

3. Siguin a, b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC respectivament oposats a A, B i C. Provau que
$$\frac{\pi}{3}\leq\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$
   Provau també que la constant $\frac{\pi}{2}$ és òptima.

4. Les interseccions de les trisectrius adjacents dels angles d'un triangle ABC són els vèrtexs d'un triangle PQR que s'anomena triangle de Morley. El teorema de Morley estableix que $\triangle PQR$ és equilàter.



Demostrau que el costat del triangle de Morley és inferior a $\frac{1}{3}$ de la longitud del menor dels costats de $\triangle ABC$.

5. Una línia recta que passa pel baricentre d'un triangle ABC talla el costat AB en el punt P i el costat AC en el punt Q. Provau que

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA}\leq\frac{1}{4}$$

Quan es compleix la igualtat?

6. Els costats d'un triangle són a, b i c. L'angle oposat al costat de longitud c és C. Demostrau que

$$c\geq(a+b)\sin\frac{C}{2}$$

Quan es compleix la igualtat?

7. Els costats d'un triangle són a, b i c. L'angle oposat al costat de longitud c és C. Si $\angle C\geq 60^\circ$, demostrau que

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 4+\csc\frac{C}{2}$$

8. Siguin a, b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC respectivament oposats a A, B i C. Si s és el semiperímetre de $\triangle ABC$, demostrau que

$$s\geq a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C$$

i digau quan es compleix la igualtat.

9. Si a és la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets b i c, demostrau que

$$\frac{(a-b)\,(a-c)}{(a+b)\,(a+c)}\leq\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$$

10. Sigui $ABCD$ un paral·lelogram. Sigui E un punt sobre la prolongació de AB, a continuació de B, i F un punt sobre la prolongació de AD, a continuació de D, tals que E, C i F estiguin alineats. Provau que $BE\cdot DF=AB\cdot AD$ i que $\sqrt{AE+AF}\geq\sqrt{AB}+\sqrt{AD}$.

11. Siguin r_a, r_b, r_c els respectius radis de les circumferències exinscrites relatives als costats a, b, c d'un triangle ABC. Si es compleix que $2r_a=r_b+r_c$, demostrau que $2a\geq b+c$. En quins casos hi ha igualtat?

12. Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle, R el radi de la seva circumferència circumscrita i r el de la inscrita. Demostrau que

    12.1. $\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$

    12.2. $\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{9}{2}Rr$

    12.3. $\frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{(2r)^2}$

    12.4. $\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4R^2}$

13. Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle, r el radi de la seva circumferència inscrita i r_a, r_b, r_c els de les exinscrites. Demostrau que

$$\sum_{\text{cíclica}} (r_a - r)(r_b + r_c)(r_b r_c + r r_a) \leq a^4 + b^4 + c^4$$

14. Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC en el qual $\angle BCA = 60°$. Demostrau que $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 2$ i digau quan es compleix la igualtat.

15. Sigui D el punt del costat AC d'un triangle ABC tal que $\angle ADB = 60°$ i $BD = AC$. Demostrau que $AB + CD > BC$.

16. Si les respectives longituds de dues altures d'un triangle són 2 i 3, provau que la longitud de la tercera altura és inferior a 6.

17. Siguin A, B i C els angles d'un triangle. Demostrau que

$$\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{2}{\cos \frac{A}{2}}$$

    Quan es compleix la igualtat?

18. La bisectriu de $\angle BAC$ d'un triangle ABC talla el costat BC en el punt D i R, R_1, R_2 són els respectius radis de les circumferències circumscrites als triangles ABC, ABD, ADC. Provau que $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \geq \frac{2}{R\cos\frac{A}{2}}$.

19. Sigui O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC i R el radi de la seva circumferència circumscrita . Si $\{A'\} = AO \cap BC$, $\{B'\} = BO \cap CA$ i $\{C'\} = CO \cap AB$, provau que $OA' + OB' + OC' \geq \frac{3R}{2}$.

20. Sigui ABC un triangle, sigui D el segon punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle BAC amb el circumcercle de $\triangle ABC$ i siguin B' i C' els respectius peus de les perpendiculars a la bisectriu AD tirades des dels vèrtexs B i C. Demostrau que

$$AD \geq BB' + CC'$$

    En quines condicions hi ha igualtat?

21. Siguin r_A, r_B, r_C els respectius radis de les circumferències interiors a un triangle ABC i tangents als seus costats i a la seva circumferència inscrita. Provau que

$$r_A + r_B + r_C \geq r$$

on r és el radi de la circumferència inscrita a $\triangle ABC$. Digau quan es compleix la igualtat.

22. Siguin a, b, c les longituds les costats d'un triangle. Denotarem per m_a, m_b, m_c (resp. v_a, v_b, v_c) les respectives longituds de les mitjanes (resp. bisectrius interiors) corresponents als costats a, b, c.

    Demostrau que almenys una de les equacions següents té solucions reals:

$$m_a x^2 + 2bx + v_a = 0, \qquad m_b x^2 + 2cx + v_b = 0, \qquad m_c x^2 + 2ax + v_c = 0,$$

23. Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC. Demostrau que existeix un triangle $A'B'C'$ les longituds dels costats del qual són $a' = a + \frac{b}{2}$, $b' = b + \frac{c}{2}$, $c' = c + \frac{a}{2}$.

    Si S i S' són les respectives àrees de $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, demostrau que

$$S' \geq \frac{9}{4} S$$

24. Sigui M el punt mitjà del costat AB d'un triangle ABC rectangle en B. Provau que $\sin(\angle ACM) \leq \frac{1}{3}$ i digau quan val la igualtat.

25. Sigui ABC un triangle amb $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Volem provar que $\angle CAB \leq 30^\circ$ i que la igualtat només val si $\triangle ABC$ és rectangle en C.