

Sessions de preparació

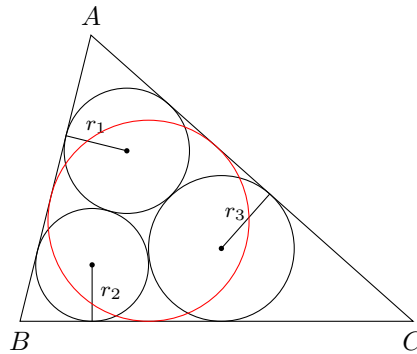
Desigualtats geomètriques

Miguel Amengual Covas

1. Demostrau que

$$r \leq \frac{(r_1 + r_2 + r_3)(3 + \sqrt{3})}{9},$$

on r designa el radi de la circumferència inscrita al triangle ABC i r_1, r_2, r_3 són els radis de les circumferències mútuament tangents de la *configuració de Malfatti* que es veu a la figura i, a més, que la igualtat només val si $r_1 = r_2 = r_3$.



2. Demostrau que si a, b i c són les longituds dels costats d'un triangle, aleshores es compleix que

2.1. $\left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{b}{c} - \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| < 1$

2.2. $\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{8}$

2.3. $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

2.4. $\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geq 3$

2.5. $\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3$

2.6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}$

2.7. $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$

Prova també que la constant 2 és òptima, és a dir, la més petita possible que garanteix la desigualtat en tots els casos.

2.8. $\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \geq ab + bc + ca$

$$2.9. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} \geq 7$$

$$2.10. (5a - b - c)(5b - c - a)(5c - a - b) \leq (a + b + c)^3$$

$$2.11. (b + c)^2(s - b)(s - c) \leq a^2bc, \text{ essent } s \text{ el semiperímetre del triangle.}$$

$$2.12. 8 < \frac{(a+b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)}{abc} \leq 9.$$

Provau també que la constant 8 és òptima, és a dir, la més gran possible que garanteix la desigualtat en tots els casos.

$$2.13. 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$2.14. \frac{a+b}{2c}(a-b)^2 + \frac{b+c}{2a}(b-c)^2 + \frac{c+a}{2b}(c-a)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$2.15. \frac{a}{2b+2c-a} + \frac{b}{2c+2a-b} + \frac{c}{2a+2b-c} \geq 1$$

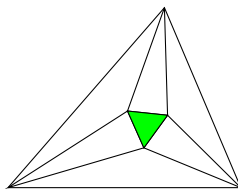
$$2.16. \frac{a-b}{a-b+c} + \frac{b-c}{b-c+a} + \frac{c-a}{c-a+b} \leq 0$$

3. Siguin a , b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC respectivament oposats a A , B i C . Provau que

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Provau també que la constant $\frac{\pi}{2}$ és òptima.

4. Les interseccions de les trisectrius adjacents dels angles d'un triangle ABC són els vèrtexs d'un triangle PQR que s'anomena triangle de Morley. El teorema de Morley estableix que $\triangle PQR$ és equilàter.



Demostrau que el costat del triangle de Morley és inferior a $\frac{1}{3}$ de la longitud del menor dels costats de $\triangle ABC$.

5. Una línia recta que passa pel baricentre d'un triangle ABC talla el costat AB en el punt P i el costat AC en el punt Q . Provau que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

Quan es compleix la igualtat?

6. Els costats d'un triangle són a , b i c . L'angle oposat al costat de longitud c és C . Demostrau que

$$c \geq (a + b) \sin \frac{C}{2}$$

Quan es compleix la igualtat?

7. Els costats d'un triangle són a , b i c . L'angle oposat al costat de longitud c és C . Si $\angle C \geq 60^\circ$, demostrau que

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 + \csc \frac{C}{2}$$

8. Siguin a , b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC respectivament oposats a A , B i C . Si s és el semiperímetre de $\triangle ABC$, demostrau que

$$s \geq a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$$

i digau quan es compleix la igualtat.

9. Si a és la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets b i c , demostrau que

$$\frac{(a - b)(a - c)}{(a + b)(a + c)} \leq (3 - 2\sqrt{2})^2$$

10. Sigui $ABCD$ un paral·lelogram. Sigui E un punt sobre la prolongació de AB , a continuació de B , i F un punt sobre la prolongació de AD , a continuació de D , tals que E , C i F estiguin alineats. Proveu que $BE \cdot DF = AB \cdot AD$ i que $\sqrt{AE} + \sqrt{AF} \geq \sqrt{AB} + \sqrt{AD}$.
11. Siguin r_a , r_b , r_c els respectius radis de les circumferències exinscrites relatives als costats a , b , c d'un triangle ABC . Si es compleix que $2r_a = r_b + r_c$, demostrau que $2a \geq b + c$. En quins casos hi ha igualtat?

12. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle, R el radi de la seva circumferència circumscripida i r el de la inscrita. Demostrau que

$$12.1. \frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

$$12.2. \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{9}{2}Rr$$

$$12.3. \frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{(2r)^2}$$

$$12.4. \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)} + \frac{1}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4R^2}$$

13. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle, r el radi de la seva circumferència inscrita i r_a , r_b , r_c els de les exinscrites. Demostrau que

$$\sum_{\text{cíclica}} (r_a - r)(r_b + r_c)(r_b r_c + r r_a) \leq a^4 + b^4 + c^4$$

14. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle ABC en el qual $\angle BCA = 60^\circ$. Demostrau que $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq 2$ i digau quan es compleix la igualtat.

15. Sigui D el punt del costat AC d'un triangle ABC tal que $\angle ADB = 60^\circ$ i $BD = AC$. Demostrau que $AB + CD > BC$.

16. Si les respectives longituds de dues altures d'un triangle són 2 i 3, provau que la longitud de la tercera altura és inferior a 6.

17. Siguin A , B i C els angles d'un triangle. Demostrau que

$$\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \frac{2}{\cos \frac{A}{2}}$$

Quan es compleix la igualtat?

18. La bisectriu de $\angle BAC$ d'un triangle ABC talla el costat BC en el punt D i R , R_1 , R_2 són els respectius radis de les circumferències circumscrites als triangles ABC , ABD , ADC . Provau que $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \geq \frac{2}{R \cos \frac{A}{2}}$.

19. Sigui O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC i R el radi de la seva circumferència circumscrita. Si $\{A'\} = AO \cap BC$, $\{B'\} = BO \cap CA$ i $\{C'\} = CO \cap AB$, provau que $OA' + OB' + OC' \geq \frac{3R}{2}$.

20. Sigui $\triangle ABC$ un triangle, sigui D el segon punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle BAC amb el circumcercle del triangle ABC i siguin B' i C' els respectius peus de les perpendiculars a la bisectriu AD tirades des dels vèrtexs B i C . Demostrau que

$$AD \geq BB' + CC'$$

En quines condicions hi ha igualtat?

21. Siguin r_A , r_B , r_C els respectius radis de les circumferències interiors a un triangle ABC i tangents als seus costats i a la seva circumferència inscrita. Provau que

$$r_A + r_B + r_C \geq r$$

on r és el radi de la circumferència inscrita a $\triangle ABC$. Digau quan es compleix la igualtat.

22. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle. Denotarem per m_a , m_b , m_c (resp. v_a , v_b , v_c) les respectives longituds de les mitjanes (resp. bisectrius interiors) corresponents als costats a , b , c .

Demostrau que almenys una de les equacions següents té solucions reals:

$$m_a x^2 + 2bx + v_a = 0, \quad m_b x^2 + 2cx + v_b = 0, \quad m_c x^2 + 2ax + v_c = 0,$$

23. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle ABC . Demostrau que existeix un triangle $A'B'C'$ les longituds dels costats del qual són $a' = a + \frac{b}{2}$, $b' = b + \frac{c}{2}$, $c' = c + \frac{a}{2}$.

Si S i S' són les respectives àrees de $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, demostrau que

$$S' \geq \frac{9}{4}S$$

24. Sigui M el punt mitjà del costat AB d'un triangle ABC rectangle en B . Provau que $\sin(\angle ACM) \leq \frac{1}{3}$ i digau quan val la igualtat.

25. Sigui ABC un triangle amb $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Volem provar que $\angle CAB \leq 30^\circ$ i que la igualtat només val si $\triangle ABC$ és rectangle en C .