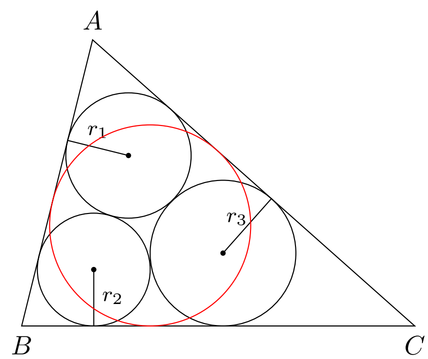
# Problema 1

Demostrau que

$$r \leq \frac{(r_1 + r_2 + r_3)\left(3 + \sqrt{3}\right)}{9},$$

on $r$ designa el radi de la circumferència inscrita al triangle $ABC$ i $r_1$, $r_2$, $r_3$ són els radis de les circumferències mútuament tangents de la *configuració de Malfatti* que es veu a la figura i, a més, que la igualtat només val si $r_1 = r_2 = r_3$.




Solució.

Establirem la validesa de la desigualtat donada fent servir les relacions següents:

$$r = \frac{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}\right)\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}} \tag{1}$$

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq (x + y + z)^2, \qquad x, y, z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

De la fórmula (1) en donarem dues demostracions a l'annexe. Per la desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica aplicada a $x, y, z$ i $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, s'obté (2). Finalment, (3) és equivalent a la desigualtat òbvia $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$.

Si substituïm $x$ per $\sqrt{r_1}$, $y$ per $\sqrt{r_2}$ i $z$ per $\sqrt{r_3}$ a (2), ens quedarà

$$\frac{\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}} \leq \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}}{9}$$

i, tenint present (1),

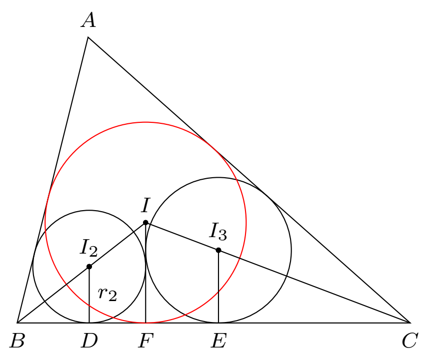
$$r \leq \frac{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}\right)}{9}.$$

Quan apliquem aquí la desigualtat obtinguda de (3) aplicada a $x = \sqrt{r_1}$, $y = \sqrt{r_2}$, $z = \sqrt{r_3}$ $\left(\sqrt{3\,(r_1 + r_2 + r_3)} \geq \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)$, s'obté la desigualtat volguda.

ANNEXE. Donem a continuació dues demostracions de la fórmula (1). Reprenent la notació emprada a l'enunciat, designarem per $I$ l'incentre del triangle $ABC$ i per $I_2$, $I_3$ els respectius centres de les circumferències de radi $r_2$, $r_3$.

Posem $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ i designem per $s$ el semiperímetre de $\triangle ABC$.

Les lletres $D$, $E$, $F$ indicaran els punts de tangència del costat $BC$ amb les circumferències de centres $I_2$, $I_3$, $I$.




PROVA 1. Els triangles $BDI_2$ i $BFI$ són semblants, ja que són rectangles i tenen un angle en comú. Així, doncs,

$$\frac{IF}{BF} = \frac{I_2D}{BD}.$$

En virtud de le propietats de les proporcions, tindrem

$$\begin{aligned} \tfrac{IF}{BF} &= \tfrac{IF-I_2D}{BF-BD} \\ &= \tfrac{IF-I_2D}{DF}. \end{aligned}$$

D'aquí aïllem $DF$,

$$DF = \frac{(IF - I_2D)\,BF}{IF}.$$

És a dir:

$$DF = \frac{(r - r_2)(s - b)}{r}.$$

Anàlogament,

$$FE = \frac{(r - r_3)(s - c)}{r}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \tfrac{(r-r_2)(s-b)}{r} + \tfrac{(r-r_3)(s-c)}{r} &= DF + DE \\ &= DE \\ &= 2\sqrt{r_2r_3} \end{aligned}$$

Aquesta igualtat, multiplicada per $r$, esdevé

$$(r - r_2)(s - b) + (r - r_3)(s - c) = 2r\sqrt{r_2r_3}$$

Similarment, tenim

$$\begin{aligned} (r - r_3)(s - c) + (r - r_1)(s - a) &= 2r\sqrt{r_3r_1}, \\ (r - r_1)(s - a) + (r - r_2)(s - b) &= 2r\sqrt{r_1r_2} \end{aligned}$$

Resolent simultàniament les tres equacions anteriors, podem aïllar $s-a$, $s-b$, $s-c$ i ens queda

$$\begin{array}{rcl} s-a & = & \frac{r}{r-r_1}\left(-\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}\right) \\ s-b & = & \frac{r}{r-r_2}\left(\sqrt{r_2r_3}-\sqrt{r_3r_1}+\sqrt{r_1r_2}\right) \\ s-c & = & \frac{r}{r-r_3}\left(\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}-\sqrt{r_1r_2}\right) \end{array}$$

La fórmula $r^2s=(s-a)(s-b)(s-c)$ (Heró) es pot escriure així:

$$r^2\left((s-a)+(s-b)+(s-c)\right)=(s-a)(s-b)(s-c)\,.$$

Substitutint aquí $s-a$, $s-b$, $s-c$ per les seves expressions obtenim una equació equivalent a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_3}}\right)r^2-2\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)r+2\sqrt{r_1r_2r_3}=0,$$

la solució apropiada de la qual és

$$r=\frac{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1+r_2+r_3}\right)\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}+\sqrt{r_3r_1}}, \tag{4}$$

com es volia.

PROVA 2. La igualtat $BC=BD+DE+EC$ es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$a=r_2\cot\frac{B}{2}+2\sqrt{r_2r_3}+r_3\cot\frac{C}{2}. \tag{5}$$

Anàlogament,

$$b=r_3\cot\frac{C}{2}+2\sqrt{r_3r_1}+r_1\cot\frac{A}{2}.$$

Per tant,

$$b\left(r_2\cot\frac{B}{2}+2\sqrt{r_2r_3}+r_3\cot\frac{C}{2}\right)=a\left(r_3\cot\frac{C}{2}+2\sqrt{r_3r_1}+r_1\cot\frac{A}{2}\right)$$

o, equivalentment,

$$\sin B\left(r_2\cot\frac{B}{2}+2\sqrt{r_2r_3}+r_3\cot\frac{C}{2}\right)=\sin A\left(r_3\cot\frac{C}{2}+2\sqrt{r_3r_1}+r_1\cot\frac{A}{2}\right).$$

Usant la fórmula trigonométrica de l'angle doble, es té

$$\begin{array}{rl} & r_2\cos^2\frac{B}{2}+2\sqrt{r_2r_3}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+r_3\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \\ = & r_3\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}+2\sqrt{r_3r_1}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+r_1\cos^2\frac{A}{2}, \end{array}$$

que es pot expressar com

$$\begin{array}{rl} & \left(\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}\right)^2-r_3\sin^2\frac{B}{2}+r_3\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \\ = & \left(\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}\right)^2-r_3\sin^2\frac{A}{2}+r_3\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}. \end{array}$$

Simplificant [1], queda

$$\left(\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}\right)^2=\left(\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}\right)^2,$$

[1] $-r_3\sin^2\frac{B}{2}+r_3\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=r_3\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}-\sin\frac{B}{2}\right)=r_3\sin\frac{B}{2}\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=r_3\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=-r_3\sin^2\frac{A}{2}+r_3\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$

d'on deduïm que

$$\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}=\sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{r_3}\sin\frac{B}{2}.$$

Amb aquesta equació i dues més de similars obtenim el sistema d'equacions homogèni en les incògnites $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$, $\sqrt{r_3}$ següent:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \sqrt{r_1}\cos\frac{A}{2} & - & \sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2} & + & \sqrt{r_3}\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right) & = & 0 \\ \sqrt{r_1}\left(\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right) & + & \sqrt{r_2}\cos\frac{B}{2} & - & \sqrt{r_3}\cos\frac{C}{2} & = & 0 \\ \sqrt{r_1}\cos\frac{A}{2} & + & \sqrt{r_2}\left(\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{C}{2}\right) & - & \sqrt{r_3}\cos\frac{C}{2} & = & 0 \end{array}\right.$$

Aquest sistema té solucions diferents de la solució trivial perquè el determinant de la matriu dels seus coeficients s'anul·la i és molt fàcil de resoldre.

Definint $t_1=\tan\frac{A}{4}$, $t_2=\tan\frac{B}{4}$ i $t_3=\tan\frac{C}{4}$, *après des joyeux calculs*, arribam a

$$\sqrt{r_1}\,(1+t_1)=\sqrt{r_2}\,(1+t_2)=\sqrt{r_3}\,(1+t_3)\,.$$

Amb això i (5) obtenim

$$r_1=\frac{r}{2}\cdot\frac{(1+t_2)\,(1+t_3)}{1+t_1}\qquad r_2=\frac{r}{2}\cdot\frac{(1+t_3)\,(1+t_1)}{1+t_2}\qquad r_3=\frac{r}{2}\cdot\frac{(1+t_1)\,(1+t_2)}{1+t_3}. \tag{6}$$

Atès que $\tan\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=1$, es compleix que

$$t_1+t_2+t_3-t_1t_2t_3=1-t_1t_2-t_2t_3-t_3t_1.$$

Substituint aquí els valors de $t_1$, $t_2$ i $t_3$ deduïts de (6) ($t_1=\frac{2\sqrt{r_2r_3}}{r}-1$, $t_2=\frac{2\sqrt{r_3r_1}}{r}-1$, $t_3=\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r}-1$) s'obté l'equació (2). Estem, doncs, en les condicions descrites a la prova anterior i acabar aquesta segona.

Per a altres demostracions de (1) es pot acudir a:

H. Fukagawa, D. Pedoe, Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg, Canadà, 1989, pp. 103-106.

Jack Garfunkel, 'Problem 1067', Crux Mathematicorum, (1985), 221; (1987), 27-30.