Problema 2.7

Demostrau que si a, b i c són les longituts dels costats d'un triangle, aleshores es compleix:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Per començar, demostrarem la validesa de la desigualtat de l'esquerra per a nombres reals positius a, b i c qualssevol, amb igualtat si, i només si, $a = b = c$.

PROVA 1. La desigualtat

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \tag{1}$$

es coneix com a *desigualtat de Nesbitt* i es pot escriure, d'una manera equivalent,

$$2\left(a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\right) \geq 3\left(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\right)$$

o, equivalentment,

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 4ab\,(a+b) + 4bc\,(b+c) + 4ca\,(c+a)\,. \tag{2}$$

Atès que $(a+b)^2 \geq 4ab$, amb igualtat si, i només si, $a = b$, resulta

$$(a+b)^3 \geq 4ab\,(a+b) \tag{3}$$

i cíclicament:

$$(b+c)^3 \geq 4bc\,(b+c) \qquad\qquad (c+a)^3 \geq 4ca\,(c+a) \tag{4}$$

Sumant aquestes tres darreres desigualtats s'obté (2) i es compleix la igualtat si, i només si, hi ha igualtat a cadascuna de las desigualtats (3) i (4).

Això és, només quan $a = b = c$.

PROVA 2. Usant la identitat

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\text{cícl.}} \frac{(b-c)^2}{(a+b)\,(a+c)}$$

i el fet que el quadrat d'un nombre real és igual o més gran que zero, s'obté immediatament (1) i la prova es completa.

D'altra banda, donem dues proves de la desigualtat

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \tag{5}$$

PROVA 1. La desigualtat $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ es pot expressar com

$$a\,(c+a)\,(a+b) + b\,(b+c)\,(a+b) + c\,(b+c)\,(c+a) < 2a\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$$

Desenvolupant els productes, veiem que es pot escriure en la forma

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b - abc < 0.$$

És a dir:

$$a^2\left(a - b - c\right) + b^2\left(b - c - a\right) + c^2\left(c - a - b\right) - abc < 0.$$

Tenint en compte que $a - b - c < 0$, $b - c - a < 0$ i $c - a - b < 0$, la desigualtat anterior és vàlida. Podem, doncs, concloure la validesa de (4).

PROVA 2. Com que $a < b + c$, es compleix

$$a + b + c < 2\left(b + c\right).$$

És a dir:

$$\frac{1}{b+c} < \frac{2}{a+b+c}.$$

Aquesta desigualtat, multiplicada per a, esdevé

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$$

i cíclicament, d'on deduïm

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2,$$

com es volia.

Si fem $a = b$ i fem tendir c a 0, llavors $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ tendeix a 2 i, per tant, la desigualtat $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ no es pot millorar.

REFINAMENT. Amb la notació anterior, la desigualtat següent

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{r}{R} \leq 2$$

on designem per R i r els radis respectius de les circumferències circumscrita i inscrita, es un refinament de (5).

Per profunditzar una mica més, les desigualtats que consignem a continuació poden ser de molta utilitat.

1. Siguin a, b, c, x, y nombres reals positius. Es compleix:

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}$$

2. Siguin a, b, c i d nombres reals positius. Es compleix:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

3. Siguin a, b i c nombres reals positius. Es compleix:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

4. Siguin a_i, b_i, x_i, $(i = 1, 2, 3)$, nombres reals positius que compleixen $a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 = t$. Demostrau que

$$\frac{x_1}{a_1 x_2 + b_1 x_3} + \frac{x_2}{a_2 x_3 + b_2 x_1} + \frac{x_3}{a_3 x_1 + b_3 x_2} \geq \frac{3}{t}$$

5. Siguin a, b, c i d nombres reals positius. Es compleix:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

6. Siguin a, b i c nombres reals positius tals que $abc = 1$. Demostrau que

$$\frac{1}{a\,(1+b)} + \frac{1}{b\,(1+c)} + \frac{1}{c\,(1+a)} \geq \frac{3}{2}$$