

Problemes de la sessió d'Equacions Funcionals 2013

1 (OME 2012) Troba totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de variable real a valors reals, tals que

$$(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x))$$

per a tots $x, y \in \mathbb{R}$.

2 (IM0 1983) Determina totes les funcions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tals que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ i per a tots $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

3 Troba totes les funcions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tals que $f(1) = 2$ i $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

4 Troba totes les funcions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$$

per a tots $x, y \in \mathbb{R}$.

5 Troba totes les funcions $f(x)$ tals que

$$3f(2-x) + 2f(x) = x^2.$$

6 Troba les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfan l'equació funcional

$$f(x^2 + y) = f(x) + y^2,$$

per a tots els x, y reals.

7 Determinar totes les funcions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$$

amb $f(1) = \frac{1}{2}$.

8 Determinar totes les funcions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

9 Existeix alguna funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(f(x)) = x^2 - 2$$

per tot nombre real x ?

10 Resol l'equació funcional

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2,$$

amb $x, y \in \mathbb{R}$.

11 Troba totes les funcions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tals que

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Resol el mateix problema pel cas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

12 (IMO 1999) Troba totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

13 Troba les solucions contínues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'equació funcional

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{f(x)^2 + f(y)^2}{2}}$$

per a tots $x, y \in \mathbb{R}$.

14 (IMO 2010) Troba totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que per a tots $x, y \in \mathbb{R}$ la següent igualtat es verifica

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

on $\lfloor a \rfloor$ és el major enter més petit o igual que a .

15 (IMO 2008) Troba totes les funcions $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tals que

$$\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per a tots nombres reals positius w, x, y, z satisfent $wx = yz$.