

### Problema 3

En un estany hi ha  $n$  pedres formant en cercle i, sobre una d'elles, s'hi ha col·locat una granota. En la pedra del costat, seguint el sentit de les agulles del rellotge, hi ha un cuc, el seu menjar preferit. Cada cop que la granota salta s'allunya exactament  $k$  pedres de distància, per  $0 < k < n$ , seguint el sentit de les agulles del rellotge.

1. Descriu una situació en què la granota no pugui arribar mai fins on està situat el cuc.
2. Descriu de forma general una forma que ens permeti, sempre que sigui possible, determinar el nombre de bots necessaris perquè la granota arribi fins on està el cuc.
3. Suposa ara el cas particular en què  $n = 50$  i  $k = 21$ . Pot la granota arribar fins on està el cuc? Quants bots necessita per fer-ho?

#### Solució.

1. Per a qualssevol valors on  $k|n$ .
2. Perquè la granota arribi al cuc aquesta ha d'haver realitzat un nombre, diguem-li  $x$ , de bots. De la mateixa forma haurà d'haver donat un nombre, diguem-li  $y$ , de voltes completes. Per tant, si arriba fins al cuc, aquesta haurà cobert una distància de  $x \cdot k$  i  $y \cdot n + 1$ ; per tant

$$x \cdot k = y \cdot n + 1.$$

Això significa que podem expressar l'1 com a combinació lineal dels nombres  $k$  i  $n$ ,

$$1 = (-y) \cdot n + x \cdot k.$$

El menor enter positiu que és combinació lineal de dos nombres enters és el seu màxim comú divisor. Així, en aquest cas, el màxim comú divisor de  $n$  i  $k$  és 1 i la igualtat anterior és una identitat de Bézout.

Per a trobar el valor dels coeficients  $(-y)$  i  $x$  podem emprar l'algorisme d'Euclides estès. Un cop obtinguts, si el valor per a  $x$  és positiu, ja hem acabat. Altrament, si  $x$  és negatiu, podem reescriure la igualtat anterior com

$$1 = (-y - k) \cdot n + (x + n) \cdot k.$$

Així,  $x + n > 0$ .

3. Notem que  $\text{mcd}(50, 21) = 1$ . Per tant, la granota, sí arribarà fins on es troba el cuc. Una identitat de Bézout per a 50 i 21 és

$$1 = 8 \cdot 50 + (-19) \cdot 21.$$

Així, com  $-19$  és negatiu, una solució serà  $-19 + 50 = 31$ . Per tant, després de 31 bots de llargada 21 la granota arribarà fins on es troba el cuc.