OLIMPÍADES MATEMÀTIQUES

TEORIA I PROBLEMES DE POLINOMIS.

INTRODUCCIÓ

Un polinomi d'una variable x és una expressió algebraica del tipus:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

L'exponent n s'anomena grau del polinomi: gr(P) = n.

Cada sumand s'anomena terme: $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, ..., a_1 x, a_0$.

Els coeficients de cada terme són els coeficients del polinomi: $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$.

En principi els coeficients seran nombres reals i si són complexos s'especificarà.

Polinomis equivalents: dos polinomis són equivalents si prenen el mateix valor numèric per a qualsevol valor de la variable. Així, un mateix polinomi es pot expressar de formes diferents:

- Identitat notable: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- Binomi de Newton: $(1 + x)^n = \sum \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \cdot a^i \cdot b^{n-i}$
- $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)$
- etc...

Mètode dels coeficients indeterminats.

Dos polinomis són equivalents si i només si són idèntics, és a dir, si tenen el mateix grau i els mateixos coeficients.

Exercici: demostreu que qualsevol equació de 2on grau, $ax^2 + bx + c = 0$, es pot expressar de la forma $\gamma(x - \alpha)^2 + \beta$ amb unes certes α, β i γ i la solució d'aquesta última equació, aïllant x, es correspon amb la fórmula de l'equació de 2on grau.

ARITMÈTICA DE POLINOMIS:

M.C.D. - Algoritme d'Euclides.

Si $R(x)$ és el residu de dividir $P(x)$ per $Q(x)$, els divisors comuns de $P(x)$ i $Q(x)$ són els mateixos que els divisors comuns de $Q(x)$ i $R(x)$. L'algoritme consisteix en anar fent les divisions $P(x) : Q(x)$, $Q(x) : R_1(x)$, $R_1(x) : R_2(x)$, etc. fins que el grau de $R_k = grau(R_{k-1})$.

Si R_k és una constant, $mcd(P(x), Q(x)) = 1$ i, per tant, $P(x)$ i $Q(x)$ són primers entre sí.

En altre cas, $mcd(P(x), Q(x)) = R_k$.

M.C.M.: $mcm(P(x), Q(x)) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{mcd(P(x),Q(x))}$

Observació: per a qualsevol $a \epsilon \Re$ tenim la igualtat:

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

ARRELS I FACTORITZACIÓ:

Si $P(a) = 0$, es diu que el nombre a és una **arrel del polinomi** $P(x)$.

Teorema del residu: el residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ és $P(a)$. Això implica que si a és arrel de $P(x)$, polinomi de grau n, aleshores podem reescriure $P(x) = (x - a)Q(x)$ on $Q(x)$ és un polinomi de grau n-1.

En conseqüència a és arrel de $P(x)$ si, i només si, el residu de la divisió $P(x) : (x - a)$ és 0.

Polinomi irreductible a $Q(x)$ i $R(x)$:

Un polinomi és irreductible o primer quan no es pot expressar com a producte de polinomis de grau inferior. Exemples: $x + 1, x^2 + 3$

Teorema de factorització única: tot polinomi a coeficients reals es pot expressar de manera "única" com a producte de polinomis irreductibles. Exemple:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = (2x - 4)(\frac{x}{2} - \frac{3}{2})$$

Teorema fonamental de l'àlgebra: Un polinomi de grau n té exactament n arrels, que poden ser complexes.

Fórmules de Cardano.

Cas grau 2 ($a \neq 0$) : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = a(x^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)x + \alpha_1 \cdot \alpha_2)$

Igualant coeficients s'obté $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a}$ i $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}$

En general:

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ la relació entre els coeficients $a_1, ..., a_n$ i les arrels $\alpha_1, ..., \alpha_n$ és:

$$\alpha_1 + ... + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$...$$
$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

PROBLEMES

1. Demostreu que per a tot $n > 1$, no existeix cap nombre primer de la forma $n^4 + 4$.
   (Indicació: expresseu $n^4 + 4$ com a producte de dos polinomis de grau 2)

2. Demostreu que en qualsevol sistema de numeració en base n major que 8 el nombre $48841_{(n}$ és un quadrat perfecte.

3. Demostreu que si $2^n - 1$ és primer, n ha de ser primer. (Nota: el recíproc és fals)

4. Un polinomi $P(x)$ dividit per $x + 1$ dóna de residu -45 i dividit per $x - 3$ dóna de residu -165. Trobeu el residu de la divisió per $x^2 - 2x - 3$.

5. Determineu un polinomi p(x) de grau mínim tal que $x^2 + 1 \mid p(x)$ i $x^3 + 1 \mid p(x) - 1$.

6. Sigui $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polinomi amb coeficients enters. Demostreu:

   a) Si $P(1)$ és imparell aleshores $P(x)$ no té arrels imparells.

   b) Si $P(-1)$ és imparell aleshores $P(x)$ no té arrels imparells.

Per practicar més:

1. Demostreu que si al producte de quatre nombres naturals consecutius se l'hi afegeix una unitat, el resultat és un quadrat perfecte.

2. Demostreu que per a tota $n > 7$, el nombre $1367631_{(n}$ és un cub perfecte en qualsevol sistema de numeració.

3. Les arrels de l'equació $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$, en substituir-les en un polinomi $P(x)$, pel menor valor s'obté 0, per a l'entremig 3 i per al major 4. Quin serà el residu de la divisió de $P(x)$ per $x^3 - x^2 - 4x + 4$

4. L'equació $x^3 + 3x^2 + qx + 3q = 0$ té dues solucions que sumen 0. Calculeu, si és possible, el coeficient q i trobeu totes les solucions.

5. Siguin a, b i c nombres reals no nuls i $a \neq b$. Proveu que si les equacions $x^2 + ax + bc = 0$ i $x^2 + bx + ca = 0$ tenen una arrel comuna, llavors les seves arrels restants compleixen l'equació $x^2 + cx + ab = 0$.

6. Siguin els polinomis $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ i $Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$. Trobeu les condicions que han de complir els paràmetres reals a, b i c, $(a \neq c)$ per tal que $P(x)$ i $Q(x)$ tinguin dues arrels comunes i resoleu, en aquest cas, les equacions $P(x) = 0$ i $Q(x) = 0$.

7. Calculeu a de manera que les quatre arrels de l'equació $x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + a = 0$ formin una proporció $(\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4})$

8. Es considera el polinomi $P(x) = x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 29x^2 + 2x - 24$. Trobeu la suma dels nombres inversos de les seves arrels.

9. Generalització del teorema de Sophie Germain: Si $n > 1$, llavors $n^4 + 4^n$ no és primer. (Competició Kürschak 1978 i abans a Mathematics Magazine 1950, proposat per A. Makowski)