

Problema 1

Les tres busques d'un rellotge - la secundària, la minutera i l'horària - poden girar entorn d'un mateix eix. Digau a quina hora, a partir de les 12, per primera vegada es superposen:

1. la busca horària i la minutera.
2. la busca minutera i la secundària.
3. les tres busques.

[La *secundària* és la busca que, en alguns rellotges, assenyala els segons]

1. la busca horària i la minutera.

PRIMERA SOLUCIÓ (ARITMÈTICA)

Al mateix temps que la busca minutera fa una volta, l'horària recorre la dotzena part de l'esfera del rellotge; així, doncs, durant aquest temps aquestes dues busques no es superposen; la superposició té lloc, per tant, després de la 1.

Cada minut, la minutera avança l'horària $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ minuts i com que la separació (a la 1) és de 5 minuts, el temps que ha de transcórrer per a la superposició és $5 : \frac{11}{12} = \frac{60}{11}\text{m} = 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s}$ i l'instant que es demana és

$$1\text{h } 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s} \quad (1)$$

Observi's que si A és el punt de l'esfera del rellotge que correspon a les 12 i B el punt corresponent a l'instant (1), les condicions de la busca minutera y l'horària partint de B són les mateixes que partint de A ; per això, hi haurà una nova superposició $1\text{h } 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s}$ més tard i les deu successives superposicions abans que les dues busques es trobin de nou en A són

$$\begin{aligned} &1\text{h } 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s} \quad 2\text{h } 10\text{m } 54\frac{6}{11}\text{s} \quad 3\text{h } 16\text{m } 21\frac{9}{11}\text{s} \quad 4\text{h } 21\text{m } 49\frac{1}{11}\text{s} \quad 5\text{h } 27\text{m } 16\frac{4}{11}\text{s} \\ &6\text{h } 32\text{m } 43\frac{7}{11}\text{s} \quad 7\text{h } 38\text{m } 10\frac{10}{11}\text{s} \quad 8\text{h } 43\text{m } 38\frac{2}{11}\text{s} \quad 9\text{h } 49\text{m } 5\frac{5}{11}\text{s} \quad 10\text{h } 54\text{m } 32\frac{8}{11}\text{s} \end{aligned} \quad (2)$$

SEGONA SOLUCIÓ (ALGEBRAICA)

Siguin A i B els respectius punts de l'esfera del rellotge que corresponen a les 12 i a l'instant de la primera superposició.

Sigui x el nombre de divisions de l'arc AB .

La minutera recorre, abans de la superposició, $60 + x$ divisions i la busca horària ha recorregut l'arc AB , o sigui, x divisions.

Com que la minutera va 12 vegades més ràpida que l'horària, es compleix

$$12x = 60 + x$$

d'on

$$x = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$$

i l'hora de la superposició és $1\text{h } 5\frac{5}{11}\text{m}$, és a dir, $1\text{h } 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s}$.

TERCERA SOLUCIÓ (PER PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES)

Siguin α i β la minutera i l'horària, respectivament. És la 1 i α recorre els 5 minuts de la distància de separació en 5 minuts; al mateix temps, β haurà recorregut $\frac{5}{12}$ minuts. Quan α hagi recorregut aquests $\frac{5}{12}$ minuts, β haurà recorregut $\frac{5}{12^2}$ minuts, i així succesivament.

És clar que l'espai recorregut per α i el temps que ha emprat es mesuren amb el mateix nombre i per això mateix l'espai recorregut ve donat per la suma

$$5 + \frac{5}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{5}{12^3} + \cdots = \frac{5}{1 - \frac{1}{12}} = 5\frac{5}{11} \text{ m}$$

L'hora que es demana és, doncs, $1\text{h } 5\text{m } 27\frac{3}{11}\text{s}$

2. la busca minutera i la secundària.

Els mateixos raonaments anteriors, aplicats a la busca minutera i la secundària, tenint en compte que aquesta va 60 vegades més ràpida que la minutera, donen que l'hora de la primera superposició després de les 12 és

$$12\text{h } 1\text{m } 1\frac{1}{59}\text{s}$$

i les 58 succesives superposicions abans que les dues busques coincideixin per primera vegada en el punt de l'esfera del rellotge que correspon a les 12 són les següents:

$$\begin{array}{cccc}
12\text{h } 1\text{m } 1\frac{1}{59}\text{s} & 12\text{h } 2\text{m } 2\frac{2}{59}\text{s} & 12\text{h } 3\text{m } 3\frac{3}{59}\text{s} & 12\text{h } 4\text{m } 4\frac{4}{59}\text{s} \\
12\text{h } 5\text{m } 5\frac{5}{59}\text{s} & 12\text{h } 6\text{m } 6\frac{6}{59}\text{s} & 12\text{h } 7\text{m } 7\frac{7}{59}\text{s} & 12\text{h } 8\text{m } 8\frac{8}{59}\text{s} \\
12\text{h } 9\text{m } 9\frac{9}{59}\text{s} & 12\text{h } 10\text{m } 10\frac{10}{59}\text{s} & 12\text{h } 11\text{m } 11\frac{11}{59}\text{s} & 12\text{h } 12\text{m } 12\frac{12}{59}\text{s} \\
12\text{h } 13\text{m } 13\frac{13}{59}\text{s} & 12\text{h } 14\text{m } 14\frac{14}{59}\text{s} & 12\text{h } 15\text{m } 15\frac{15}{59}\text{s} & 12\text{h } 16\text{m } 16\frac{16}{59}\text{s} \\
12\text{h } 17\text{m } 17\frac{17}{59}\text{s} & 12\text{h } 18\text{m } 18\frac{18}{59}\text{s} & 12\text{h } 19\text{m } 19\frac{19}{59}\text{s} & 12\text{h } 20\text{m } 20\frac{20}{59}\text{s} \\
12\text{h } 21\text{m } 21\frac{21}{59}\text{s} & 12\text{h } 22\text{m } 22\frac{22}{59}\text{s} & 12\text{h } 23\text{m } 23\frac{23}{59}\text{s} & 12\text{h } 24\text{m } 24\frac{24}{59}\text{s} \\
12\text{h } 25\text{m } 25\frac{25}{59}\text{s} & 12\text{h } 26\text{m } 26\frac{26}{59}\text{s} & 12\text{h } 27\text{m } 27\frac{27}{59}\text{s} & 12\text{h } 28\text{m } 28\frac{28}{59}\text{s} \\
12\text{h } 29\text{m } 29\frac{29}{59}\text{s} & 12\text{h } 30\text{m } 30\frac{30}{59}\text{s} & 12\text{h } 31\text{m } 31\frac{31}{59}\text{s} & 12\text{h } 32\text{m } 32\frac{32}{59}\text{s} \\
12\text{h } 33\text{m } 33\frac{33}{59}\text{s} & 12\text{h } 34\text{m } 34\frac{34}{59}\text{s} & 12\text{h } 35\text{m } 35\frac{35}{59}\text{s} & 12\text{h } 36\text{m } 36\frac{36}{59}\text{s} \\
12\text{h } 37\text{m } 37\frac{37}{59}\text{s} & 12\text{h } 38\text{m } 38\frac{38}{59}\text{s} & 12\text{h } 39\text{m } 39\frac{39}{59}\text{s} & 12\text{h } 40\text{m } 40\frac{40}{59}\text{s} \\
12\text{h } 41\text{m } 41\frac{41}{59}\text{s} & 12\text{h } 42\text{m } 42\frac{42}{59}\text{s} & 12\text{h } 43\text{m } 43\frac{43}{59}\text{s} & 12\text{h } 44\text{m } 44\frac{44}{59}\text{s} \\
12\text{h } 45\text{m } 45\frac{45}{59}\text{s} & 12\text{h } 46\text{m } 46\frac{46}{59}\text{s} & 12\text{h } 47\text{m } 47\frac{47}{59}\text{s} & 12\text{h } 48\text{m } 48\frac{48}{59}\text{s} \\
12\text{h } 49\text{m } 49\frac{49}{59}\text{s} & 12\text{h } 50\text{m } 50\frac{50}{59}\text{s} & 12\text{h } 51\text{m } 51\frac{51}{59}\text{s} & 12\text{h } 52\text{m } 52\frac{52}{59}\text{s} \\
12\text{h } 53\text{m } 53\frac{53}{59}\text{s} & 12\text{h } 54\text{m } 54\frac{54}{59}\text{s} & 12\text{h } 55\text{m } 55\frac{55}{59}\text{s} & 12\text{h } 56\text{m } 56\frac{56}{59}\text{s} \\
12\text{h } 57\text{m } 57\frac{57}{59}\text{s} & 12\text{h } 58\text{m } 58\frac{58}{59}\text{s} & &
\end{array} \tag{3}$$

A partir d'aquests instants es troben immediatament cada un dels altres en els quals es superposen la busca minutera i la secundària.

3. les tres busques.

D'acord amb (2) i (3), és clar que les tres busques només es superposen a les 12.