

56a Olimpíada Matemàtica Espanyola
Segona sessió de la fase local a les Illes Balears
10 de gener de 2020

Problema 4

Sigui ABC un triangle isòsceles amb $AB = AC$. Sigui D el punt del costat AB tal que $BD : DC = 1 : 2$ i P el punt del segment CD tal que $PC : DP = 1 : 3$.
Provau que $\angle ADP = 2 \cdot \angle DPA$.

Problema 5

Sigui x, y, z tres nombres positius que fan $x + y + z = 1$. Demostrau que

(i) $xy + yz + zx \geq 9xyz$.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - (x^3 + y^3 + z^3) \geq 6xyz$.

Problema 6

Sigui a, b, c nombres reals tals que $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$. Demostrau que si

$$\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0,$$

llavors

$$\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0.$$

És cert el recíproc?

La durada de la prova és de tres hores.
No és permès l'ús de calculadores.