Solucions als problemes de la primera fase a Balears
de la 56a Olimpíada Matemàtica Espanyola.

Problema 1.
Siguin a, b dos nombres positius tals que

$$a + b = a^3 + b^3 = a^5 + b^5.$$

Demostrau que

$$a^2 + b^2 = a^4 + b^4 = a^6 + b^6.$$

Prova 1. Escrivim la primera igualtat de la hipòtesi com

$$a\left(1 - a^2\right) = b\left(b^2 - 1\right)$$

i la segona en la forma

$$a^3\left(1 - a^2\right) = b^3\left(b^2 - 1\right).$$

Restant aquestes igualtats obtenim la igualtat següent:

$$a\left(1 - a^2\right) - a^3\left(1 - a^2\right) = b\left(b^2 - 1\right) - b^3\left(b^2 - 1\right),$$

igualtat que es pot escriure

$$a\left(1 - a^2\right)^2 + b\left(1 - b^2\right)^2 = 0.$$

Però els sumands del primer membre són ambdós no negatius i la seva suma s'anul·la. Per tant, necessàriament ha de ser nul cada un d'ells.

Així, doncs, tindrem

$$a\left(1 - a^2\right)^2 = 0, \qquad b\left(1 - b^2\right)^2 = 0,$$

Atès que a i b són nombres positius, se'n dedueix que

$$a = b = 1.$$

En conseqüència

$$a^2 + b^2 = a^4 + b^4 = a^6 + b^6,$$

com es volia.

Prova 2. Dividim les igualtats donades a la hipòtesi del problema per $a + b$. Quedarà:

$$1 = a^2 - ab + b^2 = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4,$$

d'on deduïm que

$$1 + ab = a^2 + b^2 \tag{1}$$

i

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= 1 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\ &= ab\left(a^2 + b^2\right) + (1 - ab)(1 + ab). \end{aligned}$$

Substituint aquí $1 + ab$ per la seva expressió donada per (1) s'obté

$$a^4 + b^4 = a^2 + b^2. \tag{2}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 = \left(a^3\right)^2 + \left(b^3\right)^2 &= \left(a^3 + b^3\right)^2 - 2a^3b^3 \\ &= (a+b)^2 - 2a^3b^3 \qquad \text{(per la hipòtesi)} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\,(1 - ab)\,(1 + ab) \end{aligned} \tag{3}$$

i també

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 = \left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3 &= \left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4 - a^2b^2\right) \\ &= \left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + b^2 - a^2b^2\right) \qquad \text{(per (2))} \\ &= a^4 + b^4 + a^2b^2\left(2 - \left(a^2 + b^2\right)\right) \\ &= a^2 + b^2 + a^2b^2\left(2 - (1 + ab)\right) \qquad \text{(per (1) i (2))} \\ &= a^2 + b^2 - a^2b^2\,(1 - ab) \end{aligned} \tag{4}$$

Restant (4) de (3), queda

$$0 = 2ab\,(1 - ab)\,(1 + ab) + a^2b^2\,(1 - ab)\,.$$

Això ho podem escriure

$$ab\,(1 - ab)\,(3 + ab) = 0.$$

Atès que a i b són positius, de manera que $ab\,(3 + ab) \neq 0$, veiem que

$$1 - ab = 0.$$

I basta substituir aquest valor a (3) o (4) per a obtenir

$$a^6 + b^6 = a^2 + b^2. \tag{5}$$

Tenint en compte (2) i (5) s'obtenen les dues igualtats volgudes.

Prova 3. Escrivim la primera de les igualtats de l'enunciat com

$$a\left(1 - a^2\right) = b\left(b^2 - 1\right)$$

i la segona en la forma

$$a^2 \cdot a\left(1 - a^2\right) = b^3\left(b^2 - 1\right).$$

Substitutint aquí $a\left(1 - a^2\right)$ per la seva expressió, aquesta igualtat es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$b\,(b - 1)\,(b + 1)\,(a - b)\,(a + b) = 0.$$

Atès que a i b són positius, de manera que $b\,(b + 1)\,(a + b) \neq 0$, veiem que o bé $b = 1$ o bé $a = b$.

Tan per al cas $b = 1$ com per al cas $a = b$ es pot concloure, d'una manera immediata, que $a = b = 1$.

En conseqüència,

$$a^2 + b^2 = a^4 + b^4 = a^6 + b^6,$$

com volíem demostrar.

Problema 2.

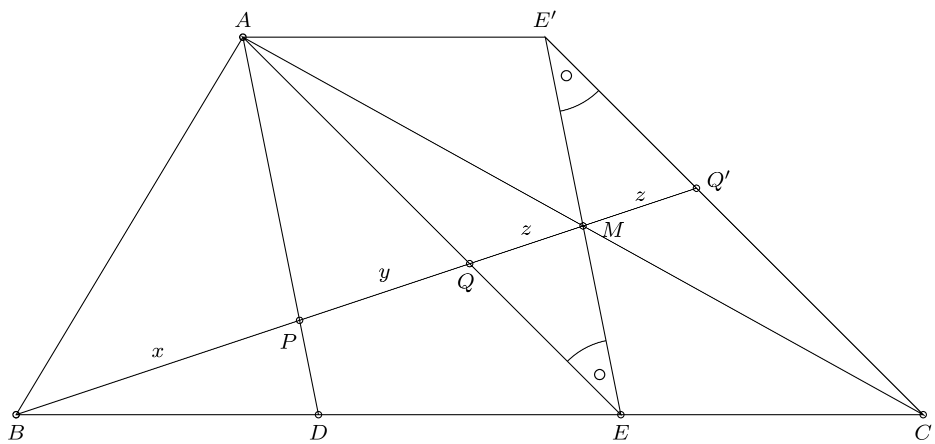
Sigui M el punt mitjà del costat CA d'un triangle ABC. Donats els punts D i E del costat BC tals que $BD : DE : EC = 1 : 1 : 1$, siguin P i Q els respectius punts d'intersecció amb BM de AD i AE.

Determinau la proporció $BP : PQ : QM$.

Solució 1. Sigui E' el punt de la recta paral·lela a BC per A tals que $CE' \parallel AE$. Per construcció, els quadrilàter $AECE'$ és un paral·lelogram. Per tant, M és el punt mitjà del segment EE', atès que les diagonals d'un paral·lelogram es bisequen mútuament.

És a dir:

$$ME = ME'.$$



En conseqüència, si denotam Q' el punt d'intersecció de CE' amb la recta que uneix B i M, els triangles MQE i $MQ'E'$ són iguals, ja que tenen iguals, respectivament, un costat i els dos angles contigus. En resulta que $MQ = MQ'$.

Posem ara $x = BP$, $y = PQ$ i $z = QM$. Tindrem $QQ' = 2z$. Del teorema de Tales aplicat a les rectes BQ' i BC amb els parells de paral·leles AD, $E'E$ i AE, $E'C$, se'n dedueix

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BD}{DE}, \qquad \frac{BQ}{QQ'} = \frac{BE}{EC}.$$

Si fem les substitucions $BP = x$, $PM = y + z$, $BQ = x + y$, $QQ' = 2z$, llavors obtenim el sistema d'equacions lineals homogèni

$$\frac{x}{y+z} = 1, \qquad \frac{x+y}{2z} = 2,$$

que es resol d'una manera immediata i dóna

$$x : y : z = 5 : 3 : 2,$$

que és la proporció volguda.

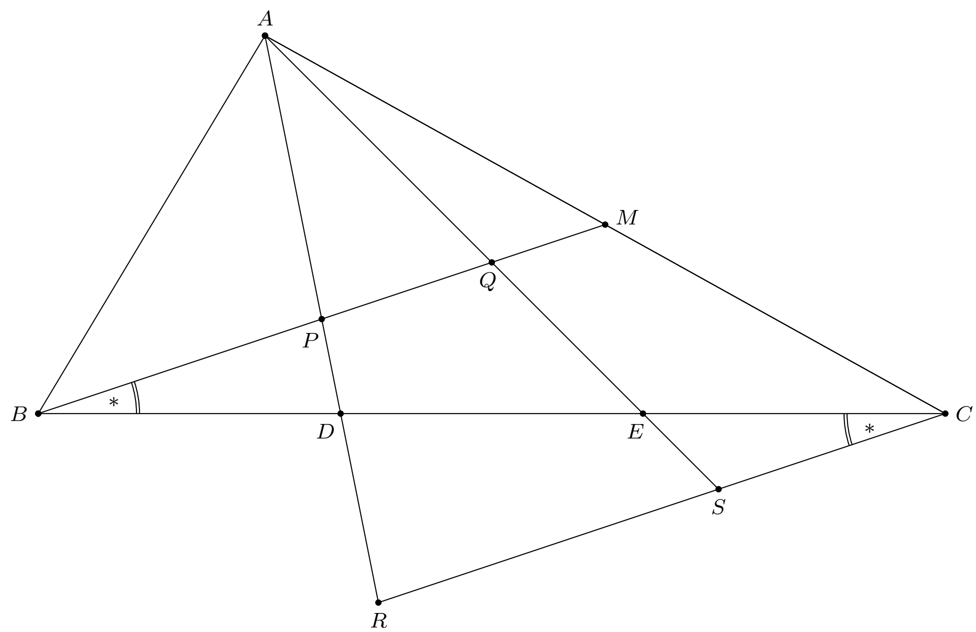
Solució 2. Siguin R i S, respectivament, els punts d'intersecció de les semirectes (d'origen A) AD, AE amb la paral·lela a BM per C.

Atès que els triangles PBD i RCD són semblants, serà $\frac{BP}{RS} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$. I atès que els triangles APM i ARC també són semblants, $\frac{PM}{RS} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$. De les dues equacions obtingudes es dedueix que

$$\frac{BP}{PM} = 1.$$

Substituint aquí PM per $PQ + QM$, aquesta igualtat s'escriu

$$\frac{BP}{PQ + QM} = 1. \tag{6}$$



De la mateixa manera, a partir dels parells de triangles semblants QBE, SCE i AQM, ASC, tenim $\frac{BQ}{SC} = \frac{BE}{EC} = 2$ i $\frac{QM}{SC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$, d'on deduïm

$$\frac{BQ}{QM} = 4.$$

Substituïm BQ per $BP + PQ$ a l'expressió anterior. Ens quedarà, finalment,

$$\frac{BP + PQ}{QM} = 4. \tag{7}$$

La proporció desitjada està donada, doncs, pel sistema d'equacions (6) i (7), que és equivalent al de la solució anterior. Per tant,

$$BP : PQ : QM = 5 : 3 : 2.$$

Generalització.

Si M és el punt del costat CA de $\triangle ABC$ tal que $AM : MC = k : l$ i si D, E són punts del costat BC (situats com es veuen a les figures anteriors) tals que $BD : DE : EC = u : v : w$, es compleix:

$$\frac{BP}{(k+l)\left((k+l)(u+v)+kw\right)u} = \frac{PQ}{(k+l)(u+v+w)kv} = \frac{QM}{\left((k+l)u+k(v+w)\right)kw}.$$

Problema 3.

En cada un dels quadradets d'una quadrícula 6×6 s'hi escriu un nombre enter positiu. Es permet augmentar en 1 cada un dels nombres de qualsevol quadrat $n \times n$ contingut en la quadrícula, amb $2 \leq n \leq 6$.

És possible aconseguir que els 36 nombres siguin múltiples de 3 fent només passos d'aquesta mena?

Solució.

No sempre és possible.

Anomenem X la suma dels nombres que hi ha als quadradets marcats amb el símbol $\oplus$ i designem per Y la suma dels nombres que hi ha als quadradets marcats amb el símbol $\otimes$.

	$\oplus$	$\oplus$	$\otimes$	$\otimes$	
$\otimes$		$\oplus$	$\otimes$		$\oplus$
$\otimes$	$\otimes$			$\oplus$	$\oplus$
$\oplus$	$\oplus$			$\otimes$	$\otimes$
$\oplus$		$\otimes$	$\oplus$		$\otimes$
	$\otimes$	$\otimes$	$\oplus$	$\oplus$	

"Només" cal observar que, en cada pas, la diferència $X - Y$ o bé augmenta en 3, o bé disminueix en 3 o bé no canvia. Així, doncs, el nombre $X - Y$ és invariant mòdul 3.

Per tant, si al principi $X - Y \not\equiv 0 \pmod 3$, no podem aconseguir que els 36 nombres siguin múltiples de 3.

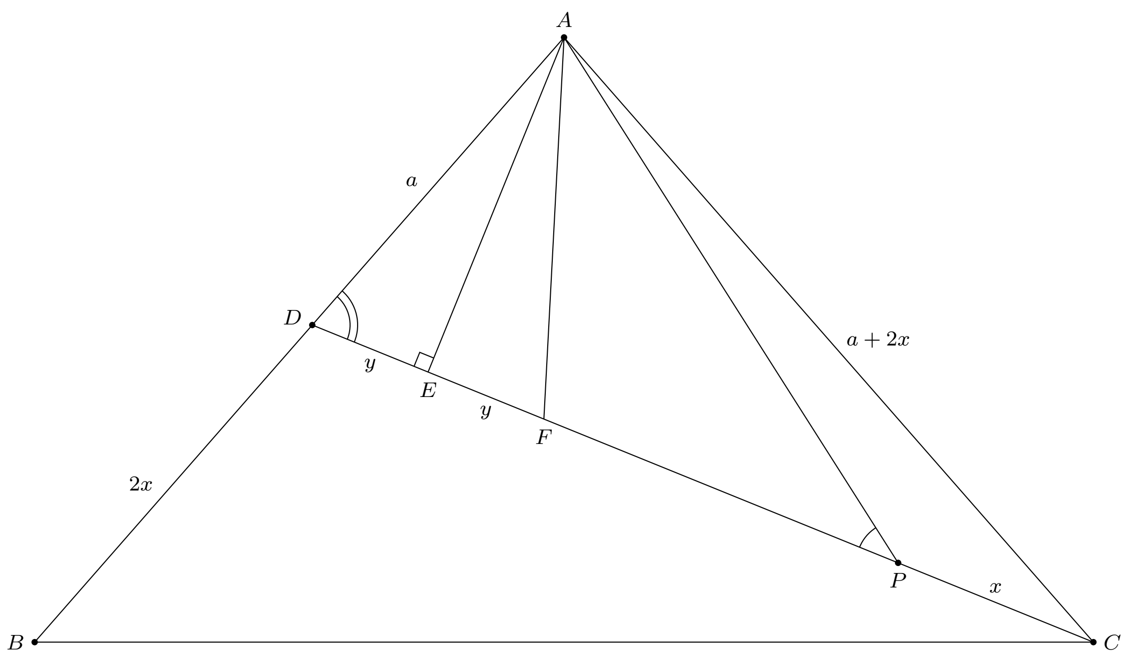
Problema 4.

Sigui ABC un triangle isòsceles amb $AB = AC$. Sigui D el punt del costat AB tal que $BD : DC = 1 : 2$ i P el punt del segment CD tal que $PC : DP = 1 : 3$.

Provau que $\angle ADP = 2 \cdot \angle DPA$.

PROVA 1. Designant per x la longitud del segment PC i per a la longitud del segment AD, es té:

$$DP = 3x \qquad BD = 2x \qquad AB = AC = a + 2x.$$



Sigui E el peu de la perpendicular des de A a CD i posem y per a denotar la distància entre D i E.

Com que $AE \perp CD$, resulta:

$$AD^2 - DE^2 = AC^2 - EC^2.$$

És a dir:

$$a^2 - y^2 = (a + 2x)^2 - (4x - y)^2 .$$

Simplificant, queda

$$3x - 2y = a. \tag{8}$$

Sigui F el punt simètric de D respecte de E. Llavors, $DF = 2y$ i $AF = AD$ (això segueix de la igualtat dels triangles rectangles ADE i AFE), d'on deduïm que

$$FP = DP - DF = 3x - 2y = \text{per (8)} = a = AF.$$

Per tant,

$$\angle FAP = \angle FPA.$$

Podem, doncs, concloure que

$$\angle ADP = \angle ADF = \angle DFA = 2 \cdot \angle FPA = 2 \cdot \angle DPA.$$

PROVA 2. Reprenent la notació emprada a la prova anterior:
Del teorema del cosinus aplicat al triangle ADP amb $\angle DPA = \varphi$, se'n dedueix que

$$a^2 = (3x)^2 + AP^2 - 2 \cdot 3x \cdot AP \cdot \cos\varphi, \tag{9}$$

i aplicat a $\triangle APC$, en el qual $\angle APC = \pi - \varphi$,

$$(a + 2x)^2 = x^2 + AP^2 - 2 \cdot x \cdot AP \cdot \cos(\pi - \varphi).$$

Aquesta igualtat, multiplicada per 3, esdevé

$$3(a + 2x)^2 = 3x^2 + 3\angle AP^2 + 6 \cdot x \cdot AP \cdot \cos\varphi.$$

Sumant aquesta igualtat amb (9) obtindrem :

$$AP^2 = a(a + 3x).$$

És a dir:

$$AP^2 = AD \cdot (AD + DP).$$

En virtut de la proposició següent, obtenim la igualtat següent, equivalent:

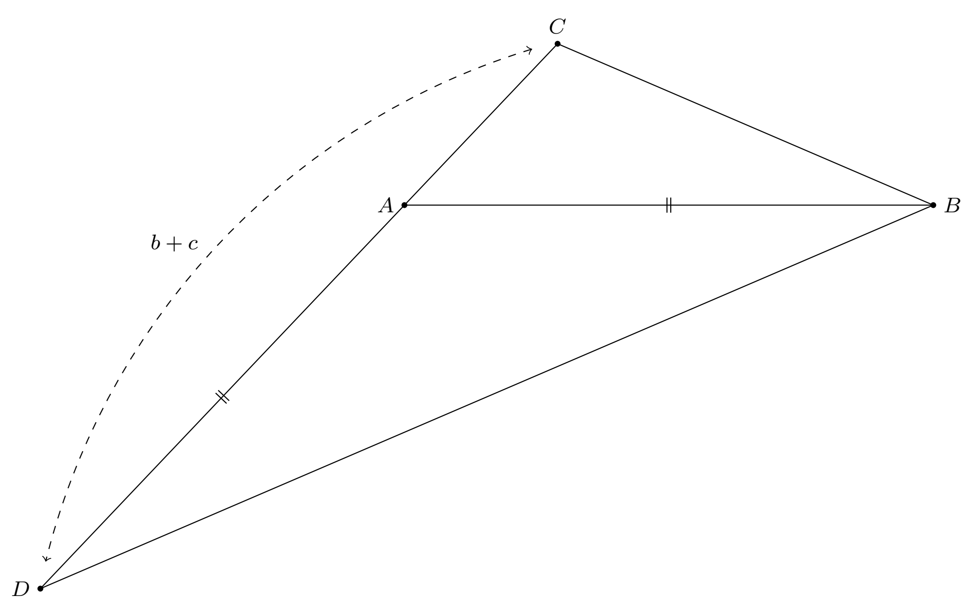
$$\angle ADP = 2 \cdot \angle DPA,$$

com es volia.

PROPOSICIÓ. Sigui ABC un triangle amb costats a, b, c oposats a A, B, C respectivament. Es compleix:

$$\angle A = 2 \cdot (\angle B) \Leftrightarrow a^2 = b(b + c).$$

PROVA. Sigui D el punt sobre CA, a continuació de A, tal que $AD = c$.



Per construcció, el triangle ADB és isòsceles amb

$$\angle DBA = \angle ADB = \frac{1}{2}(\angle CAB). \tag{10}$$

1. Suposem $\angle A = 2\,(\angle B)$. Llavors els triangles ABC i BDC són semblants (tenen dos angles iguals: un perquè és comú, l'altre pel fet de ser, per (10), $\angle CDB = \angle ADB = \angle ABC$).

   En resulta que $\frac{CA}{BC} = \frac{BC}{CD}$, o bé
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b+c},$$
   igualtat que equival a la relació donada.

2. Suposem $a^2 = b\,(b+c)$ o, equivalentment, $\frac{b}{a} = \frac{a}{b+c}$. Els triangles ABC i BDC són semblants (tenen un angle comú i els corresponents costats proporcionals). Així, doncs, tendran els angles homòlegs iguals. En particular, l'angle oposat al costat a en $\triangle ABC$ serà igual a l'angle oposat al costat $b+c$ en $\triangle DBC$, obtenint
$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle DBC \\ &= \angle DBA + \angle ABC \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\angle CAB) + \angle ABC, \qquad \text{per (10)} \end{aligned}$$
   d'on deduïm que
$$\angle CAB = 2\,(\angle ABC)\,,$$
   com es volia.

Problema 5.
Siguin x, y, z tres nombres positius que fan $x+y+z=1$. Demostrau que

(i) $xy+yz+zx \geq 9xyz$.

(ii) $x^2+y^2+z^2-\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq 6xyz$.

Solució.

(i) Com que $x+y+z=1$, resulta:

$$xy+yz+zx=(xy+yz+zx)(x+y+z)=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz.$$

Aplicant aquí la desigualtat de les mitjanes aritmètica i geomètrica, es té

$$xy+yz+zx \geq 6\sqrt[6]{\left(x^2y\right)\left(xy^2\right)\left(y^2z\right)\left(yz^2\right)\left(z^2x\right)\left(zx^2\right)}+3xyz=9xyz, \tag{11}$$

on la igualtat val si i només si $x=y=z$.

(ii) Prova 1. Tenint en compte que $x+y+z=1$, s'obté

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-\left(x^3+y^3+z^3\right) &= x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z) \\ &= x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) \\ &\geq 6\sqrt[6]{\left(x^2y\right)\left(x^2z\right)\left(y^2z\right)\left(y^2x\right)\left(z^2x\right)\left(z^2y\right)} \\ &= 6xyz. \end{aligned}$$

Prova 2. De la identitat[1]

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

aplicada amb $x+y+z=1$ es dedueix

$$x^2+y^2+z^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)=xy+yz+zx-3xyz.$$

I basta ara tenir present (11) per a obtenir la desigualtat desitjada.

Prova 3. La desigualtat (11) es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y) \geq 6xyz.$$

Sumem-hi 1 als dos membres. Tindrem,

$$(x+y+z)^2+xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y) \geq (x+y+z)^3+6xyz.$$

[1]Per la regla de Sarrus, $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$. Per les propietats dels determinants, $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$

Això ho podem escriure

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-\left(x^3+y^3+z^3\right) &\geq 2xy\,(1-z)+2yz\,(1-x)+2zx\,(1-y) \\ &\quad -2xy-2yz-2zx+12xyz. \end{aligned}$$

És a dir:

$$x^2+y^2+z^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)\geq 6xyz,$$

que és allò que volíem demostrar.

Problema 6.

Siguin a, b, c nombres reals tals que $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Demostrau que si

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$

llavors

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

És cert el recíproc?

Prova 1. Desenvolupant el producte

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right),$$

veiem que es pot escriure en la forma

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)+\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right).$$

Aquesta expressió esdevé

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Ara bé, l'últim terme és nul perquè $a(c-b)+b(a-c)+c(a-b)$ és idènticament zero. Per tant:

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

Si fem la substitució $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, llavors podem concloure que

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0,$$

com volíem demostrar.

El recíproc no és, en general, cert. Si $\sum_{\text{cíclica}}\frac{a}{(b-c)^2}=0$, llavors o bé $\sum_{\text{cíclica}}\frac{a}{b-c}=0$ o bé $\sum_{\text{cíclica}}\frac{1}{b-c}=0$.

Prova 2. Definim una funció real de variable real, que anomenarem $f(x)$, de la manera següent:

$$f(x)=\frac{a}{x+(b-c)}+\frac{b}{x+(c-a)}+\frac{c}{x+(a-b)},$$

que es pot escriure d'una forma més compacta com

$$f(x)=\frac{(a+b+c)x^2}{(x+b-c)(x+c-a)(x+a-b)}.$$

Això mostra que $x=0$ és una arrel doble[2] i, per tant,

$$f'(0)=0.$$

[2] Convé adonar-se que $x=0$ pertany al domini de $f(x)$.

Tenint això present i el fet que la derivada de la funció $f(x)$ es pot expressar en la forma

$$f'(x) = -\left(\frac{a}{(x+b-c)^2} + \frac{b}{(x+c-a)^2} + \frac{c}{(x+a-b)^2}\right),$$

s'obté la igualtat volguda.

Prova 3. Considerem un polinomi de tercer grau les arrels del qual siguin $\lambda = b - c$, $\mu = c - a$, $\nu = a - b$. Com que $\lambda + \mu + \nu = 0$, un tal polinomi es pot expressar com

$$x^3 + qx - r,$$

on q, r són nombres reals. Com que $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, tenim que $\lambda\mu\nu \neq 0$. D'això se segueix que $r \neq 0$. Es té,

$$\lambda^3 + q\lambda - r = 0, \quad \mu^3 + q\mu - r = 0, \quad \nu^3 + q\nu - r = 0,$$

d'on deduïm que

$$r \cdot \frac{a}{\lambda^2} = a\lambda + q \cdot \frac{a}{\lambda}, \quad r \cdot \frac{b}{\mu^2} = b\mu + q \cdot \frac{b}{\mu}, \quad r \cdot \frac{c}{\nu^2} = c\nu + q \cdot \frac{c}{\nu},$$

Sumant aquestes igualtats s'obté la igualtat següent:

$$r\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\mu^2} + \frac{c}{\nu^2}\right) = (a\lambda + b\mu + c\nu) + q\left(\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\mu} + \frac{c}{\nu}\right)$$

El primer terme del membre de la dreta és idènticament nul i el segon terme també ho és, en virtut de la hipòtesi. Per tant,

$$r\left(\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\mu^2} + \frac{c}{\nu^2}\right) = 0.$$

Com que $r \neq 0$, pel que ja hem vist, ens queda finalment

$$\frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\mu^2} + \frac{c}{\nu^2} = 0,$$

com es volia.