

Parábolas, las de algunos ministros

Vamos a valernos de las nuevas posibilidades que nos brinda la calculadora CASIO fx 82 SP-X Iberia, para hacer un estudio de la parábolas. Se supone que anteriormente los alumnos ya han trabajado dicha cuestión en clase y han conseguido un nivel de interiorización de los diferentes conceptos más que aceptable. Ahora pasaremos a jugar con dichas cuestiones

Tenemos una sencilla parábola $-2x^2 - 5x + 7$ Que nos puedes decir sobre dicha parábola?

Después de analizar varios casos, los alumnos ya saben que se encuentran ante una parábola abierta hacia abajo, esto es, el vértice es máximo. Corta el eje Y en el valor 7. SI estudio los puntos de corte con la recta $Y=7$, me salen los valores $x=0$ y $x=-5/2$, de manera que el eje de simetría está en $-5/4$ (el valor medio entre los dos obtenidos) Muchos alumnos ya empiezan a ver que para calcular la coordenada X del vértice o donde se halla el eje de simetría de la parábola, se puede hacer más rápido calculando directamente $-B/2A$, que es a fin de cuentas lo que acabamos de hacer.

Ahora nos toca encontrar la coordenada Y del vértice, para lo cual, lo único que debemos hacer es encontrar la imagen de $X=-5/2$. Para ello nos podemos aprovechar de las memorias de la calculadora. Guardamos los coeficientes de la ecuación en las memorias A, B y C y el valor de la coordenada X del vértice en la memoria X

$-2 \rightarrow A$ -2	$-5 \rightarrow B$ -5	$7 \rightarrow C$ 7
$-\frac{5}{4} \rightarrow x$ -5/4	$Ax^2 + Bx + C$ 81/8	

Ya tenemos las coordenadas del vértice $(-5/4 ; 81/8)$.

Con los alumnos más avanzados se puede trabajar el encontrar la fórmula que nos permita hallar la coordenada Y del vértice directamente mediante una fórmula. Que se halla al trabajar la imagen del punto $-B/2A$ en la parábola $Ax^2 + Bx + C$. De donde obtenemos $-(B^2-4AC)/(4A)$ para la coordenada Y del vértice. Estas fórmulas son fáciles de recordar pues tienen mucha semejanza con la de búsqueda de los puntos de corte con el eje X

De manera que ya sabemos que nuestra parábola viene definida por las siguientes dos expresiones $-2x^2-5x+7$ o $-2(x+5/4)^2+81/8$

Con la opción de las dos tablas que nos da la nueva calculadora podemos comprobar fácilmente que esas dos expresiones corresponden a la misma parábola, que tiene el vértice en el punto que hemos calculado

$f(x) = -2x^2 - 5x + 7$	$g(x) = -2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{81}{8}$	Rango tabla Inic. :-1,5 Final:5 Paso :0,25																																																												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>-1,5</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>2</td><td>-1,25</td><td>10,125</td><td>10,125</td></tr> <tr><td>3</td><td>-1</td><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>4</td><td>-0,75</td><td>9,625</td><td>9,625</td></tr> </tbody> </table> 81 8		x	f(x)	g(x)	1	-1,5	10	10	2	-1,25	10,125	10,125	3	-1	10	10	4	-0,75	9,625	9,625	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>-0,5</td><td>9</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>-0,25</td><td>8,125</td><td>8,125</td></tr> <tr><td>7</td><td>0</td><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,25</td><td>5,625</td><td>5,625</td></tr> </tbody> </table> 0		x	f(x)	g(x)	5	-0,5	9	9	6	-0,25	8,125	8,125	7	0	7	7	8	0,25	5,625	5,625	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th></th> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>9</td><td>0,5</td><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,75</td><td>2,125</td><td>2,125</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>12</td><td>1,25</td><td>-2,375</td><td>-2,375</td></tr> </tbody> </table> 1,25		x	f(x)	g(x)	9	0,5	4	4	10	0,75	2,125	2,125	11	1	0	0	12	1,25	-2,375	-2,375
	x	f(x)	g(x)																																																											
1	-1,5	10	10																																																											
2	-1,25	10,125	10,125																																																											
3	-1	10	10																																																											
4	-0,75	9,625	9,625																																																											
	x	f(x)	g(x)																																																											
5	-0,5	9	9																																																											
6	-0,25	8,125	8,125																																																											
7	0	7	7																																																											
8	0,25	5,625	5,625																																																											
	x	f(x)	g(x)																																																											
9	0,5	4	4																																																											
10	0,75	2,125	2,125																																																											
11	1	0	0																																																											
12	1,25	-2,375	-2,375																																																											

Vemos que efectivamente la imagen es la misma para todos los puntos. En $X=-1,25$ tenemos el eje de simetría ya que los puntos anterior y posterior tienen la misma coordenada Y. En la séptima fila de la tabla vemos como la parábola corta el eje Y por el valor 7, y además, en la fila 11 nos muestra que uno de los puntos de corte del eje X es 1. Al tener el eje de simetría en $-5/4$, el otro punto de corte tiene que estar en $-7/2$.

Utilizando la potencia de cálculo y las memorias de la Classwiz podemos comprobar fácilmente que esas son las dos soluciones

$-2 \rightarrow A$	$-5 \rightarrow B$	$7 \rightarrow C$
-2	-5	7
$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$	$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$	
$-\frac{7}{2}$	1	

De manera que ya tenemos la parábola definida de una tercera forma $-2(x-1)(x+7/2)$. Y podemos comprobarlo fácilmente haciendo una nueva tabla de dos funciones

$f(x) = -2(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right)$	$g(x) = -2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{81}{8}$	Rango tabla Inic.: -4 Final: 2 Paso: 0,25																																													
<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>2</td><td>-3,75</td><td>-2,375</td></tr> <tr><td>3</td><td>-3,25</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>-3,25</td><td>2,125</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	1	-4	-5	2	-3,75	-2,375	3	-3,25	0	4	-3,25	2,125	<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>-1,75</td><td>9,625</td></tr> <tr><td>11</td><td>-1,5</td><td>10</td></tr> <tr><td>12</td><td>-1,25</td><td>10,125</td></tr> <tr><td>13</td><td>-1</td><td>10</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	10	-1,75	9,625	11	-1,5	10	12	-1,25	10,125	13	-1	10	<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>19</td><td>0,5</td><td>4</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,75</td><td>2,125</td></tr> <tr><td>21</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>22</td><td>1,25</td><td>-2,375</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	19	0,5	4	20	0,75	2,125	21	1	0	22	1,25	-2,375
x	f(x)	g(x)																																													
1	-4	-5																																													
2	-3,75	-2,375																																													
3	-3,25	0																																													
4	-3,25	2,125																																													
x	f(x)	g(x)																																													
10	-1,75	9,625																																													
11	-1,5	10																																													
12	-1,25	10,125																																													
13	-1	10																																													
x	f(x)	g(x)																																													
19	0,5	4																																													
20	0,75	2,125																																													
21	1	0																																													
22	1,25	-2,375																																													
-7,2	-5,4	1																																													

Ahora nos faltaría comprobar si somos capaces de encontrar el foco y la directriz de dicha parábola y comprobar que la distancia desde cualquier punto de la parábola es la misma

Como la distancia del vértice, tanto al foco como a la directriz es $1/4A$. Como en nuestro caso la parábola tiene un máximo en el vértice, el foco quedará más bajo. Como el vértice está en $(-5/4; 81/8)$ y la distancia es $1/8$, el foco se encuentra situado en $(-5/4; 81/8 - 1/8)$ lo que nos da $(-5/4; 10)$ Y la directriz se encontrará en $Y = 81/8 + 1/8$ por tanto $Y = 41/4$

Para comprobar si lo hemos calculado bien, nuevamente recurriremos a nuestra aliada Casio fx 82EX para hallar la distancia de cualquier punto de la parábola (que denotaríamos como $(z; P(z))$) al foco y a la recta directriz. Como función F en la tabla de la classwiz calcularemos la distancia de los

puntos al foco mediante la fórmula $\sqrt{\left(z - \left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2 + (P(z) - 10)^2}$ y en la función G la distancia a la directriz mediante el cálculo $41/4 - P(z)$

$f(x) = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2 + (Ax^2 + Bx + C - 10)^2}$	$f(x) = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2 + (Ax^2 + Bx + C - 10)^2}$	$g(x) = \frac{41}{4} - (Ax^2 + Bx + C)$																														
Rango tabla Inic.: -4 Final: 2 Paso: 0.25	<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>15,25</td><td>15,25</td></tr> <tr><td>2</td><td>12,625</td><td>12,625</td></tr> <tr><td>3</td><td>10,25</td><td>10,25</td></tr> <tr><td>4</td><td>8,125</td><td>8,125</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	1	15,25	15,25	2	12,625	12,625	3	10,25	10,25	4	8,125	8,125	<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>0,625</td><td>0,625</td></tr> <tr><td>11</td><td>0,25</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>12</td><td>0,125</td><td>0,125</td></tr> <tr><td>13</td><td>0,25</td><td>0,25</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	10	0,625	0,625	11	0,25	0,25	12	0,125	0,125	13	0,25	0,25
x	f(x)	g(x)																														
1	15,25	15,25																														
2	12,625	12,625																														
3	10,25	10,25																														
4	8,125	8,125																														
x	f(x)	g(x)																														
10	0,625	0,625																														
11	0,25	0,25																														
12	0,125	0,125																														
13	0,25	0,25																														
	-4	-1																														

Y si jugamos al revés? Dados unos puntos, calcular la ecuación de la parábola que pasa por ellos. Primero debemos averiguar cuántos puntos son necesarios para definir una parábola. Enseguida ven que hacen falta tres, pero, y si utilizamos puntos significativos de la parábola? Si nos dan los dos puntos de corte del eje X tenemos mucha información añadida como por ejemplo donde está el eje de simetría y por tanto la coordenada X del vértice, pero son posibles infinitas parábolas. Necesitamos otro punto más, que puede ser el de corte del eje Y. Probemos con la parábola que corta el eje X en 2 y 8 y el eje Y en -16. Rápidamente encontramos que la parábola es $-x^2 + 10x - 32$, ya que si atacamos el problema con la ecuación de la parábola dados los puntos de corte del eje X solo tenemos una incógnita, y es muy fácil de resolver. No cuesta mucho cambiar el tercer punto de la parábola por uno cualquiera en lugar del de corte del eje Y

Podemos hacer un ejercicio análogo dando el vértice de la parábola. Aunque es un punto muy importante, no nos define la parábola, podemos dibujar infinitas con el mismo vértice. Si añadimos el punto de corte con el eje Y, a pesar de contar únicamente con dos puntos de la parábola vemos que esta está determinada. Hay que explicarles que realmente tenemos tres puntos identificados, ya que tenemos el de corte del eje Y, y si simétrico. En la siguiente tanda de ejercicios les damos el vértice y uno de los puntos de corte del eje X (aquí enseguida atacan el problema como han aprendido antes de dos puntos de corte del eje X y otro punto más, en este caso el vértice) . Para acabar, les llevamos al caso más complicado, cuando tenemos tres puntos cualesquiera de la parábola, ya que para resolver el problema hay que trabajar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. A no ser que sepamos utilizar nuestra calculadora, nos llevará un ratito. Para probarlo, encuentra la parábola que pasa por los puntos $(-1;-1)$ $(2;3)$ y $(10;-13)$. Ánimo, con la calculadora mis alumnos lo hacen en un minuto ;-)

Como conclusión, y una vez resueltos los casos anteriores podemos proponerles el encontrar la parábola dados el foco y la directriz. Pensándolo un momento, no es muy complicado encontrar tres puntos por los que pasará la parábola, y aplicando el ejercicio anterior, con tres puntos ya sabemos calcularlo