Sessions de preparació per a l'olimpíada matemàtica

Sessió 1: Elements de la teoria de nombres

Revisió de Setembre del 2017

1 Introducció

Les matemàtiques sovint les relacionam en fer exercicis de forma mecànica. Resoldre un sistema d'equacions, un problema, fer un límit, una derivada... El que fem a l'insitut, en definitiva.

En aquestes sessions aprendreu que la cosa no funciona així. Les matemàtiques certament pretenen resoldre problemes, però no pas aquells dels que ja es coneix la solució. Resoldre un sistema d'equacions no és fer matemàtiques, és aplicar les matemàtiques. Per posar un exemple, algun matemàtic en algun moment va plantejar-se com es podria resoldre un sistema d'equacions lineal i va obtenir uns mètodes que, aplicant-los, ens porten a les solucions. A partir d'aleshores, per algú que coneix aquests mètodes, resoldre sistemes d'equacions lineals ja no és fer matemàtiques. Durant aquests dies anirem resolent problemes dels quals en desconeixem, no només la solució, sinó també l'estratègia a seguir per a trobar-la. Això és fer matemàtiques.

Per alguns de vosaltres seran les primeres passes en l'ofici de matemàtic. Aprendrem tècniques generals d'enfrontament i de resolució de problemes que podreu aplicar en qualsevol moment. El principi d'inducció, l'anàlisi exhaustiva, els mètodes directe, contrarecíproc o per reducció a l'absurd, així com la refutació per contraexemple són mètodes que ens serviran per a arribar a la solució final d'un problema que se'ns plantegi.

Heu de tenir present que, tot i haver dividit les sessions en diferents àrees que treballareu, els problemes matemàtics sovint toquen diferents d'aquestes àrees. És com dir que els aliments estan formats per aigua, matèria inorgànica, hidrats de carboni, lípids, proteïnes i vitamines. No hi ha gairebé cap aliment que sigui una font pura de només un d'ells. El mateix passa amb les matemàtiques. De segur que no farem cap problema que "només" sigui d'aritmètica, sinó que en molts utilitzarem tècniques d'altres camps.

2 Successions

Una successió $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ és una llista ordenada de nombres, els quals s'anomenen *termes de la successió*. La manera d'escriure és a_n, que vol dir terme que ocupa la posició n. Així, a_1 vol dir primer terme, a_2 vol dir segon terme, etc.

2.1 Progressions aritmètiques

Una successió $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, es diu que estan en *progressió aritmètica* si cada terme es pot obtenir a partir de l'anterior sumant-li una mateixa quantitat d:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d$
...
$a_{n+1} = a_n + d$
...

Al nombre d se l'anomena *diferència* de la progressió aritmètica.

Per exemple, la successió $(a_n) = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ té $d = 2$ com a diferència, i la successió $(b_n) = 5, 1, -3, -7, -11, \ldots$ té $d = -4$ com a diferència.

En una progressió aritmètica podem calcular el terme n-èssim de la successió a través del terme general, que s'obté de la forma següent:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Així, dels dos exemples anteriors, en el primer és $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = -1 + 2n$ i en la segona progressió és $b_n = 9 - 4n$.

Per a calcular la suma dels k primers termes d'una progressió aritmètica, apliquem la fórmula

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2}$$

Així, en els exemples anteriors tenim que $a_{15} = 29$ i la suma dels 15 primers termes de la successio és $S_{15} = \frac{(1+29)\cdot 15}{2} = 225$ per la primera successió, mentre que la segona successió és $b_{15} = -51$ i $S_{15} = \frac{(5-51)\cdot 15}{2} = -345$.

2.2 Progressions geomètriques

Una successió de nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$, es diu que estan en *progressió geomètrica* si cada terme es pot obtenir a partir de l'anterior multiplicant-lo per una mateixa quantitat r:

$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r$

...

$a_{n+1} = a_n \cdot r$

etc. Al nombre r se l'anomena *raó* de la progressió geomètrica.

Per exemple, la successió $(c_n) = 5, 10, 20, 40, 80, \ldots$ té $r = 2$ com a raó, i la successió $(d_n) = 360, 120, 40, \frac{40}{3}, \ldots$ té raó $r = \frac{1}{3}$.

En una progressió geomètrica, per a calcular el terme n-èssim de la successió (terme general) s'utilitza l'expressió següent:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Així, dels dos exemples anteriors, en el primer és $c_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ i en la segona progressió és $d_n = \frac{360}{3^{n-1}}$.

Per a calcular la suma dels k primers termes d'una progressió geometrica, apliquem la fórmula

$$S_k = \frac{a_1 - a_k \cdot r}{1 - r}$$

Així, en els exemples anteriors tenim que $c_8 = 640$ i la suma dels 8 primers termes de la successio és $S_8 = \frac{5-640\cdot 2}{1-2} = \frac{-1275}{-1} = 1275$ per la primera successió, mentre que la segona successió és

$$d_8 = \frac{40}{243} \text{ i } S_8 = \frac{360 - \frac{40}{243} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{262480}{729}}{\frac{2}{3}} = \frac{131200}{243} \approx 539,92$$

En el cas que fos $|r| < 1$ es pot calcular la *suma de tots els termes* de la successió, dons en fer-se cada vegada més petits (en valor absolut) aquest valor "suma infinita" és un nombre finit (no es dispara). Es calcula utilitzant l'expressió

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Aíxí doncs, en el cas de la successió (c_n) no podem calcular la suma dels infinits termes, doncs les sumes parcials S_k van creixent de forma exponencial i aquesta valdria infinit. En el cas (d_n), però, en ser $r = \frac{1}{3} < 1$ llavors podem calcular-la i s'obté:

$$S_\infty = \frac{360}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{360}{\frac{2}{3}} = 540$$

Observau que el valor de S_8 calculat abans és gairebé aquest valor.

Exercici 2.1 *Si els tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica llavors el perímetre és múltiple de 12.*

Exercici 2.2 *Trobar una progressió aritmètica tal que la suma dels seus n primers termes valgui n^2 per a tot n.*

3 Principi d'inducció.

El resultat següent és molt útil quan es pretén demostrar que certa propietat la cumpleixen tots els nombres naturals.

Proposició 3.1 *Sigui $P(n)$ una propietat que pot satisfer un nombre n. Doncs si es demostra que*

i. 1 cumpleix la propietat P (és a dir, tenim $P(1)$)

ii. si un nombre natural k qualsevol cumpleix la propietat P llavors el següent $(k+1)$ també l'ha de cumplir (és a dir, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$).

Aleshores tot el conjunt dels nombres naturals satisfà la propietat $P(n)$.

Exemple: Vegem que la suma dels primers nombres enters imparells consecutius és sempre un quadrat perfecte. En termes matemàtics, vegem que $1+3+5+...+(2n-1)$ és un quadrat perfecte. Més concretament (comproveu-ho per casos senzills), $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

En efecte, per a $n=1$ tenim que $1 = 1^2$, per $n=2$ llavors $1+3 = 2^2$, per a $n=3$ tenim $1+3+5 = 3^2$, etc.

El pas inductiu és suposar que la propietat és certa per $n = k$ i veure que això obliga a que també sigui certa per a $n = k+1$. És a dir, suposem que $1+3+...+(2k-1) = k^2$ i volem veure que $1+3+...+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$. Si substituïm la suposició en aquesta igualtat tenim:

$$\underbrace{1+3+...+(2k-1)}_{k^2} + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

com volíem demostrar.

Aquí teniu uns quants exercicis per a practicar el principi d'inducció.

Exercici 3.2 *Demostreu per a tot enter n es satisfà que*

i. $n^3 - n$ és divisible per 3

ii. $n^5 - n$ és divisible per 5

iii. $n^7 - n$ és divisible per 7

Exercici 3.3 *Demostreu que per a tot nombre natural n*

i. $11^n - 4^n$ és multiple de 7.

ii. $2^{2n+1} + 1$ és divisible per 3.

iii. $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ és múltiple de 11.

Exercici 3.4 *Demostreu que $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ és múltiple de 8 per a tot enter positiu n.*

4 Sistemes de numeració

Nosaltres estem avesats a considerar els nombres en base 10. Els ordinadors, en canvi, operen en base 2 o, actualment, en base 16. Anem ara a estudiar com es pot treballar amb base b qualsevol.

Proposició 4.1 *Donat un nombre $b \geq 2$, tot nombre natural n es pot escriure de manera única de la forma*

$$n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_r b^r$$

amb $a_i < b$ per a tot $i = 0, 1, 2, ..., r$ nombres naturals i $a_r \neq 0$. El nombre expressat així es diu que està escrit en sistema de numeració de base b.

Exemple 4.2 *El nombre 1584 es pot escriure com:*

$b = 10$	$1584 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$	$1584 = 1584_{(10)}$
$b = 7$	$1584 = 4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 2$	$1584 = 4422_{(7)}$
$b = 5$	$1584 = 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4$	$1584 = 22314_{(5)}$

Exercici 4.3 *Els tres nombres naturals $1652_{(n)}$, $2012_{(n)}$ i $2042_{(n)}$ (escrits en base n) estan en progressió aritmètica. Determinau la base n de numeració i la raó de la progressió.*

Exercici 4.4 *Un nombre enter s'escriu amb tres xifres diferents. Obtenim tres nombres de dues xifres cada un suprimint la xifra de les centenes, la de les desenes i la de les unitats. La suma d'aquests tres nombres és la meitat del nombre de tres xifres inicial. Troba'l.*

5 Reducció a l'absurd

Exemple 5.1 *Provar que la suma de quatre nombres enters positius consecutius no pot ser un quadrat perfecte.*

En efecte, si diem $n-1$, n, $n+1$ i $n+2$, amb $n \geq 2$, als quatre nombres, llavors la suma és $4n+2$. Vegem, per reducció a l'absurd que no pot ser un quadrat perfecte.
Suposem que sí; llavors és $4n + 2 = a^2$, per algun enter a. Com que $4n + 2$ és parell, llavors a^2 és parell i, per tant, també ho és a. Així doncs, $a = 2k$ per algun enter k, d'on resulta $4n + 2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ que, simplificant, obtenim $2n + 1 = 2k^2$, un nombre senar igual a un nombre parell, que no pot ser. Contradicció.

Exercici 5.2 *Estudiar si existeix un nombre natural n tal que 2^2 divideix n i 4^2 divideix $n + 2$.*

Exercici 5.3 *4 boles negres i 5 boles blanques es col·loquen, en ordre arbitrari, al voltant d'una circumferència. Si dues boles consecutives són del mateix color, s'afegeix una nova bola negra entre elles. En cas contrari, s'afegeix una bola blanca. Es retiren les boles negres i blanques inicials i es repeteix el procés. És possible obtenir 9 boles blanques?*

Exercici 5.4 *Provar que el producte de tres nombres positius consecutius no pot ser un cub perfecte.*

6 Exercicis per a practicar

Exercici 6.1 *Demostreu per a tot* $n \in \mathrm{N}$ *es satisfà que*

i. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
ii. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.
iii. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

Exercici 6.2 *En un cercle de radi R s'hi inscriu un quadrat; en el quadrat, un cercle i així successivament. Trobar la suma de les àrees dels cercles i la dels quadrats.*

Exercici 6.3 *Trobar el valor de* x *en l'equació següent:*

$$2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$$

Exercici 6.4 *Quant val la suma de* $1+11+111+\ldots+11\_\_\_1$ *on el darrer terme està format per n uns.*

Exercici 6.5 *Considereu la successió:* $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ *Quin en seria el terme* 2013è*?*

Exercici 6.6 *Calcular la suma dels quadrats dels 100 primers termes d'una progressió aritmètica, sabent que la suma de tots ells val* -1 *i que la suma dels termes en lloc parell val* 1.

Exercici 6.7 *Provar que en una progressió aritmètica d'enters positius amb infinits termes, si hi ha un quadrat perfecte llavors n'hi ha infinits.*

7 bibliografia utilitzada i recomanada

1. Bujalance, Emilio i altres. *Elementos de Matemática Discreta*, Ed. Sanz y Torres, 1997.
2. García Capitán, F.J. *Un pequeño Manual para la Resolución de Problemas*
3. Moreno, M.A., Tellechea, E. *Colectivo de Problemas resueltos para Estudiantes de Alto Rendimiento*
4. *http://www.iecat.net/institucio/societats/SCMatematiques/index.asp* (publicacions electròniques)