Sessions de preparació (2019-2020)
Mostra de solucions als problemes 6, 7, 24, 25, 26 i 27.
Miquel Amengual Covas

Problema 6.

Els costats d'un triangle són a, b i c. L'angle oposat al costat de longitud c és C. Demostrau que

$$c \geq (a+b)\sin\frac{C}{2}$$

Quan es compleix la igualtat?

Solució 1.

Proposició. Es compleix:

$$(a+b)^2\,(s-a)\,(s-b) + (a-b)^2\,s\,(s-c) = abc^2,$$

on s designa el semiperímetre del triangle.

Prova. Desenvolupant els quadrats $(a+b)^2$ i $(a-b)^2$, veiem que l'expressió

$$(a+b)^2\,(s-a)\,(s-b) + (a-b)^2\,s\,(s-c)$$

es pot escriure en la forma

$$\left(a^2+b^2\right)\left[(s-a)\,(s-b)+s\,(s-c)\right] + 2ab\left[(s-a)\,(s-b)-s\,(s-c)\right]. \tag{1}$$

Per la definició de s, tenim que

$$(s-a)\,(s-b)+s\,(s-c) = ab$$

i

$$(s-a)\,(s-b)-s\,(s-c) = \frac{1}{2}\left(c^2-a^2-b^2\right).$$

Substituint a (1) s'obté la igualtat donada a la proposició.

Com que

$$(a-b)^2\,s\,(s-c) \geq 0, \tag{2}$$

en virtut d'aquella igualtat:

$$abc^2 \geq (a+b)^2\,(s-a)\,(s-b).$$

Aquesta desigualtat es pot escriure

$$c \geq (a+b)\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}},$$

que és equivalent a la desigualtat volguda.

La igualtat esdevé si, i només si, la igualtat s'ateny a (2) i.e., si, i només si, $a-b=0$ i.e., si, i només si, el triangle és isòsceles amb $a=b$.

Solució 2. Pel teorema del sinus, la desigualtat proposada es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$\sin C \geq (\sin A + \sin B) \sin \frac{C}{2}.$$

Substituint la suma $\sin A + \sin B$ per $2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ i tenint en compte que $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$, s'obté

$$\sin C \geq 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Usant la fórmula trigonomètrica del sinus de l'angle doble, obtenim

$$\sin C \geq \sin C \cos \frac{A-B}{2}.$$

Dividint aquesta desigualtat per $\sin C$ obtindrem la desigualtat següent, equivalent i vàlida:

$$1 \geq \cos \frac{A-B}{2},$$

on la igualtat es compleix només quan $A = B$.

Problema 7.

Els costats d'un triangle són a, b i c. L'angle oposat al costat de longitud c és C. Si $\angle C \geq 60°$, demostrau que

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 4 + \csc\frac{C}{2}$$

Prova. Es té:

$$\begin{aligned}
(a+b)\left(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\right) &= (\sin A+\sin B)\left(\tfrac{1}{\sin A}+\tfrac{1}{\sin B}+\tfrac{1}{\sin C}\right)\\
&= 2+\tfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin A\sin B}+\tfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}\\
&= 4+\tfrac{(\sin A-\sin B)^2}{\sin A\sin B}+\tfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}\\
&= 4+\tfrac{\left(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))}+\tfrac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\
&= 4+\tfrac{8\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}+\tfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\\
&= 4+\tfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\tfrac{8\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos(A-B)+\cos C}-\tfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\left(1-\cos\tfrac{A-B}{2}\right)\\
&= 4+\tfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}+2\sin^2\tfrac{A-B}{4}\left(\tfrac{8\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\tfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Així, doncs, per provar la desigualtat proposada és suficient demostrar que

$$\frac{8\sin^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4}}{\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 0. \tag{3}$$

Demostrem-ho. Observem que $\cos^2\frac{A-B}{2} > \cos^2\frac{A+B}{2} = \sin^2\frac{C}{2}$, això és, $\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2} > 0$. I com que $\sin\frac{C}{2} > 0$, la desigualtat (3), multiplicada per $\left(\cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} > 0$ es pot escriure

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4} \geq \cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}.$$

Ara bé, la hipòtesi $\angle C \geq 60°$ implica que $\sin\frac{C}{2} \geq \frac{1}{2}$.

És a dir:

$$\sin^3\frac{C}{2} \geq \frac{1}{8},$$

d'on deduïm que

$$8\sin^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{4} \geq \cos^2\frac{A-B}{4} \geq \cos^2\frac{A-B}{2} \geq \cos^2\frac{A-B}{2}-\sin^2\frac{C}{2},$$

que és allò que volíem demostrar.

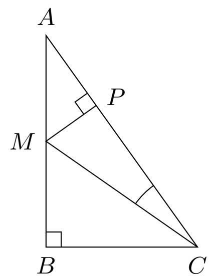
Aquest problema, proposat pel qui subscriu, va ser publicat a La Gaceta de la RSME, Vol. 19 (2016), núm. 2. Una solució diferent de la que es presenta aquí fou publicada al Vol. 20 (2017), núm. 2, de l'esmentada revista.

Problema 24.

Sigui M el punt mitjà del costat AB d'un triangle ABC rectangle en B. Provau que $\sin(\angle ACM) \leq \frac{1}{3}$ i digau quan val la igualtat.

Prova. Sigui P el peu de la perpendicular tirada des de M a CA. Els triangles APM i ABC són semblants: els dos són rectangles i comparteixen l'angle del vèrtex A. Així, doncs,

$$\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{CA}. \tag{4}$$



Calculem ara $\sin(\angle ACM)$. Tindrem:

$$\sin(\angle ACM) = \frac{MP}{MC}.$$

Substituint aquí MP pel seu valor deduït de (4) ($MP = AM \cdot BC/CA$), s'obté

$$\sin(\angle ACM) = \frac{AM \cdot BC}{CA \cdot MC}. \tag{5}$$

Posem $BC = a$ i $AB = c$. Aleshores, $AM = c/2$ i, pel teorema de Pitàgores aplicat als triangles ABC i MBC, $CA = \sqrt{a^2 + c^2}$ i $MC = \sqrt{a^2 + (c/2)^2}$.

Substitutint tot això a (5) ens queda:

$$\sin(\angle ACM) = \frac{ca}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{4a^2 + c^2}}. \tag{6}$$

De la desigualtat de Cauchy-Schwarz aplicada a $\overrightarrow{u} = (a, c)$ i $\overrightarrow{v} = (c, 2a)$, se'n dedueix

$$\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{4a^2 + c^2} \geq ac + c \cdot 2a = 3ca.$$

És a dir:

$$\frac{ca}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{4a^2 + c^2}} \leq \frac{1}{3}.$$

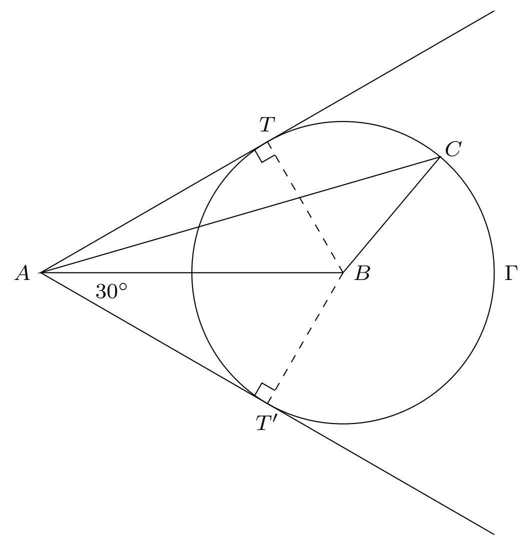
Tenint present (6) s'obté la desigualtat volguda i, a més, la igualtat es compleix només quan $\frac{a}{c} = \frac{c}{2a}$, això és, quan $2a^2 = c^2$.

Problema 25.

Sigui ABC un triangle amb $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Volem provar que $\angle CAB \leq 30°$ i que la igualtat només val si $\triangle ABC$ és rectangle en C.

PROVA 1. Denotem per Γ la circumferència de centre B i radi $\overline{BC}$. Adonem-nos que aquesta circumferència és el lloc geomètric del vèrtex C del triangle ABC.

D'altra banda, com que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} > \overline{BC}$, el vèrtex A és exterior a Γ. Aleshores, si tracem les tangents a Γ que passen per A i denotem per T i T' els punts de tangència, tots els punts de Γ (excepte T i T') són interiors a l'angle TAT'. En conseqüència, el costat AC de $\triangle ABC$ és interior a $\angle TAT'$.



Prenem, per a fixar les idees, AC interior a $\angle TAB$ (ens quedaria una cosa similar amb AC interior a $\angle BAT'$). Ens queda:

$$\angle CAB = \angle TAB - \angle TAC \leq \angle TAB. \tag{7}$$

Tenint present que el triangle ABT és rectangle i que $AB = 2 \cdot BT$, $\angle TAB = 30°$ (vegeu l'annexe).

La desigualtat donada per (7) s'escriurà, doncs,

$$\angle CAB \leq 30°,$$

com volíem.

La igualtat només val si $\angle TAC = 0°$, això és, quan el vèrtex C coincideix amb el punt de tangència T. O sigui, quan $\triangle ABC$ és rectangle amb $\angle BCA = 90°$.

PROVA 2. Aplicant el teorema del sinus, la igualtat $AB = 2 \cdot BC$ es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$\sin C = 2 \cdot \sin A$$

Dividint per 2 i tenint en compte que $\sin C \leq 1$, es té

$$\sin A \leq \frac{1}{2}.$$

És a dir:

$$\sin A \leq \sin 30° \tag{8}$$

Atès que $AB = 2 \cdot BC > BC$, serà $\angle C > \angle A$, d'on deduïm que $\angle A < 90°$. Com que per a $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funció $\sin x$ és creixent, de (8) se'n dedueix que $\angle A \leq 30°$ i, a més, la igualtat es compleix només quan $\angle BCA = 90°$.

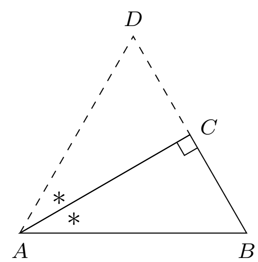
Annexe.

La proposició següent ens dóna un resultat de geometria euclídia.

Proposició. Es compleix:

Si ABC es un triangle rectangle amb $\angle BCA = 90°$ i $AB = 2 \cdot BC$, aleshores $\angle CAB = 30°$.

Prova. Sigui D el punt sobre BC, a continuació de C, tal que $CD = BC$. Per construcció, els triangles ABC i ADC són iguals, ja que són rectangles i tenen els corresponents catets iguals. En resulta que $\angle CAB = \angle DAC$ i $AD = AB$.



Com que $BD = BC + CD = 2 \cdot BC = AB$, tenim que $BD = AB = AD$. Així, doncs, el triangle ABC és equilàter i, per tant, $\angle DAB = 60°$.

En conseqüència,

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAB = 30°,$$

com es volia.

Problema 26.

En el pla d'un triangle isòsceles ABC, amb $AB = AC$, tenim una línia recta l que passa per A i és paral·lela a BC.

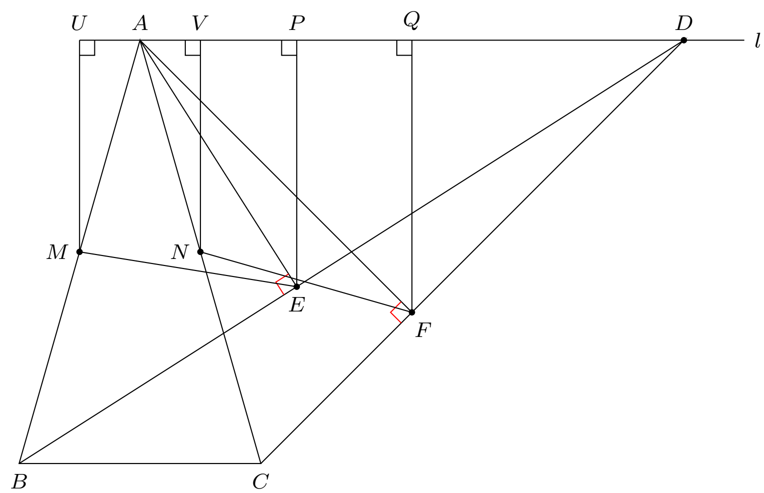
Sigui D un punt arbitrari de l. Siguin E, F, respectivament, els peus de les perpendiculars des de A a BD, CD i denotem per P, Q les respectives projeccions ortogonals de E, F sobre l.

Demostrau que

$$AP + AQ \leq AB$$

i digau quan es compleix la igualtat.

Solució 1. Siguin M, N els punts mitjans, respectivament, dels costats AB, AC de $\triangle ABC$. Atès que el triangle ABE és rectangle en E, serà $ME = \frac{1}{2}AB$. I atès que $\triangle ACF$ és rectangle en F, $NF = \frac{1}{2}AC$.



Denotem per U, V les respectives projeccions ortogonals de M, N sobre l. Com que $MN \parallel BC$ i $BC \parallel l$, tenim $MN \parallel l$.

En conseqüència, $MU = NV$. D'això se segueix que els triangles AUM i AVN són iguals: els dos són rectangles i tenen iguals un catet i la hipotenusa. Així, doncs,

$$UA = AV.$$

Per tant, com que

$$UA + AP = UP \leq ME = \frac{1}{2}AB \tag{9}$$

i

$$AQ - AV = VQ \leq NF = \frac{1}{2}AC, \tag{10}$$

tenim que

$$AP + AQ \leq \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Tenint present que $AB = AC$, això ho podem escriure

$$AP + AQ \leq AB,$$

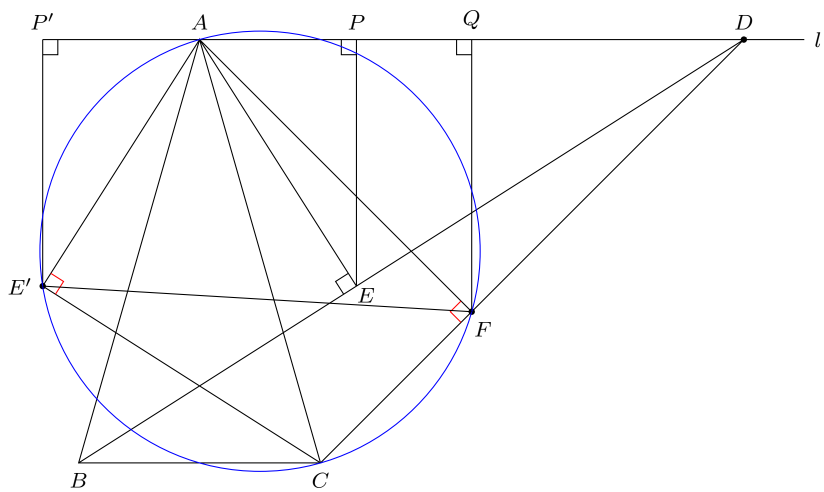
que és allò que volíem demostrar. La igualtat només val si es compleix la igualtat a (9) i (10). Això implica que els punts E i F estan sobre la recta que uneix M i N. Aleshores, pel teorema de l'angle exterior aplicat al triangle isòsceles BME en M,

$$\angle ABC = \angle AMN = \angle AME = 2(\angle MBE) = 2(\angle ABE) = 2(\angle ABC - \angle DBC),$$

d'on deduïm que

$$\angle DBC = \frac{1}{2}\left(\angle ABC\right).$$

Solució 2. Siguin E', P' els punts simètrics, respectivament, de E, P respecte de la mediatriu del segment BC. Aleshores, $\angle AE'B = \angle AEB = 90°$. Els angles rectes en els vèrtexs oposats E' i F del quadrilàter $AE'CF$ fan que els punts A, E', C i F siguin concíclics, això és, estiguin continguts en una mateixa circumferència. Com que d'aquesta circumferència, en el nostre cas, AC n'és un diàmetre i $E'F$ una corda, serà $E'F \leq AC$.



D'aquí obtenim

$$\begin{aligned} AP + AQ &= P'A + AQ \\ &= P'Q \\ &\leq E'F \\ &\leq AC \\ &= AB, \end{aligned} \tag{11}$$

com volíem demostrar. La igualtat es compleix només quan valen les igualtats a (11), que hom pot dir, d'una manera equivalent, quan $E'F$ és un diàmetre de Ω paral·lel a l. En aquest cas, són iguals (per corresponents) l'angle AOF i l'angle exterior en C de $\triangle ABC$.

Pel teorema de l'angle inscrit,

$$ACF = \frac{1}{2}\left(\angle AOF\right).$$

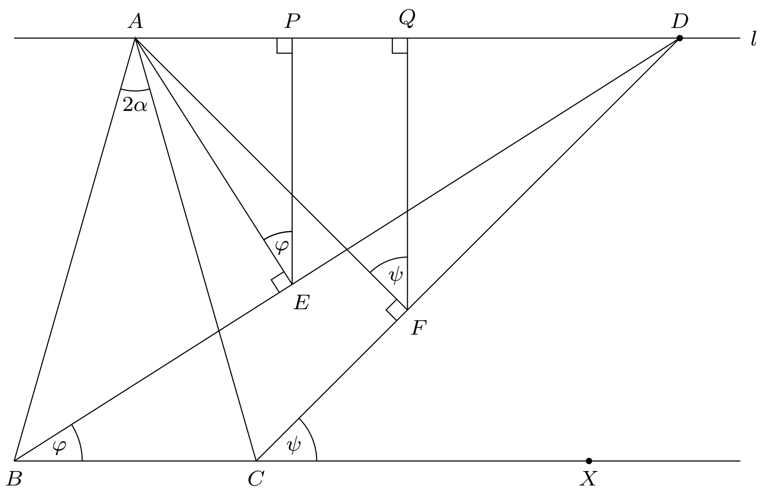
D'això se segueix que CD és la bisectriu exterior de l'angle C de $\triangle ABC$.

Solució 3. Posem $\varphi = \angle DBC$. Aleshores $\angle AEP = \varphi$ (recordem que dos angles són iguals si els seus corresponents costats són perpendiculars) i

$$\overline{AP} = \overline{AE} \cdot \sin\varphi \tag{12}$$

Si denotam per 2α l'angle al vertèx de ABC, serà $\angle ABC = 90° - \alpha$, $\angle ABE = \angle ABD - \angle ABC = (90° - \alpha) - \varphi$ i

$$\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \sin\left(\angle ABE\right) = \overline{AB} \cdot \sin\left(90° - (\varphi + \alpha)\right) = \overline{AB} \cdot \cos\left(\varphi + \alpha\right).$$



Substitutint aquest valor a (12) s'obté

$$\overline{AP} = \overline{AB}\sin\varphi\cos(\varphi+\alpha)\,. \tag{13}$$

Anàlogament, si $\psi = \angle DCX$, on X és un punt de la semirecta BC, a continuació de C, serà $\angle AFQ = \psi$ i

$$\overline{AQ} = \overline{AF}\cdot\sin\psi. \tag{14}$$

També tenim $\angle BCA = 90° - \alpha$ i com que

$$\angle BCA + \angle ACF + \angle DCX = 180°,$$

la relació anterior ens donará

$$\angle ACF = 90° - (\psi - \alpha)$$

i, per tant,

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= \overline{AC}\cdot\sin(\angle ACF)\\ &= \overline{AB}\cdot\cos(\psi-\alpha)\,.\end{aligned}$$

Substituint això a (14) s'obté

$$\overline{AQ} = \overline{AB}\sin\psi\cos(\psi-\alpha)\,.$$

Sumant aquesta igualtat a (13) obtenim la igualtat següent

$$\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{AB}\left(\sin\varphi\cos(\varphi+\alpha) + \sin\psi\cos(\psi-\alpha)\right).$$

Usant la fórmula trigonomètrica de la suma dels sinus de dos angles, obtenim

$$\overline{AP} + \overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}\left(\sin(2\varphi+\alpha) + \sin(-\alpha) + \sin(2\psi-\alpha) + \sin\alpha\right).$$

Simplificand els sumands $\sin(-\alpha)$ i $\sin\alpha$, queda

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{AQ} &= \tfrac{1}{2}\overline{AB}\left(\sin(2\varphi+\alpha) + \sin(2\psi-\alpha)\right)\\ &= \overline{AB}\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi+\alpha)\\ &= \leq \overline{AB},\end{aligned} \tag{15}$$

atès que $\sin(\varphi+\psi) \leq 1$ i $\cos(\varphi-\psi+\alpha) \leq 1$.

A més, la igualtat $\overline{AP}+\overline{AQ} = \overline{AB}$ es compleix només quan $\sin(\varphi+\psi) = 1$ i $\cos(\varphi-\psi+\alpha) = 1$, d'on deduïm que φ i ψ compleixen el sistema $\varphi+\psi = 90°$, $\varphi-\psi+\alpha = 0$, que es resol d'una manera immediata i dóna $\varphi = 45° - \frac{\alpha}{2}\left(= \frac{1}{2}(\angle ABC)\right)$, $\psi = 45° + \frac{\alpha}{2}$.

Veiem, doncs, que la igualtat a (15) esdevé si, i només si, BD és o bé la bisectriu interior o bé la bisectriu exterior de l'angle B de $\triangle ABC$.

Problema 27.

Les mitjanes corresponents als costats AB i AC d'un triangle ABC són perpendiculars. Demostrau que

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$$

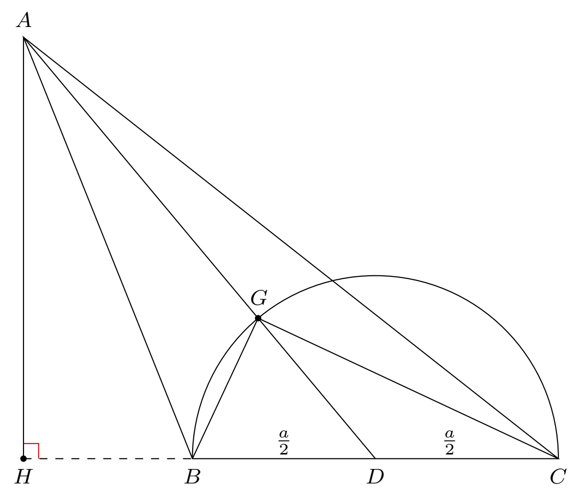
i digau quan val la igualtat.

Comencem establint diversos símbols que usarem d'ara endavant.

- a, b, c, els costats oposats a A, B, C.
- D, el punt mitjà del costat BC.
- G, el baricentre de $\triangle ABC$.
- H, el peu de la perpendicular des de A a BC.

Solució 1. Atès que $\triangle BGC$ és rectangle, serà $DG = DB = DC = \frac{a}{2}$. I atès que G triseca AD,

$$AD = \frac{3a}{2}. \tag{16}$$



Del teorema del sinus aplicat a $\triangle ABC$, se'n dedueix que

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \qquad \sin C = \frac{c \sin A}{a}.$$

Multiplicant aquestes igualtats obtindrem la igualtat següent:

$$\sin B \sin C = \frac{bc \sin^2 A}{a^2}.$$

Es té,

$$\cot B + \cot C = \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin (B + C)}{\sin B \sin C}. \tag{17}$$

Substituint aquí $\sin B \sin C$ per la seva expressió i, tenint en compte que $\sin (B + C) = \sin A$ (perquè els angles A i $B + C$ són suplementaris), la igualtat (17) esdevé

$$\cot B + \cot C = \frac{a^2}{bc \sin A}. \tag{18}$$

Així, doncs, per provar la desigualtat proposada és suficient demostrar que $\frac{a^2}{bc\sin A}$ és no inferior a $\frac{2}{3}$.

Per això observem que l'àrea del triangle ABC és $\frac{1}{2}bc\sin A$ i també $\frac{1}{2}a\cdot AH$. Per tant,

$$bc\sin A = a\cdot AH \leq a\cdot AD = (\text{usant } (16)) = a\cdot\frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

És a dir:

$$\frac{a^2}{bc\sin A} \geq \frac{2}{3},$$

com de fet volíem.

Es compleix la igualtat si i només si $AH = AD$ i.e., la mediana AD és altura de $\triangle ABC$, i.e., si i només si el triangle ABC és isòsceles amb $b = c$.

Solució 2. Es té,

$$\cot B + \cot C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{AD} = (\text{usant } (16)) = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}.$$

La igualtat s'ateny si, i només si, $\triangle ABC$ és isòsceles amb $b = c$.

Aquesta solució també és vàlida si un dels angles B o C és obtús.

Solució 3. (Generalització).

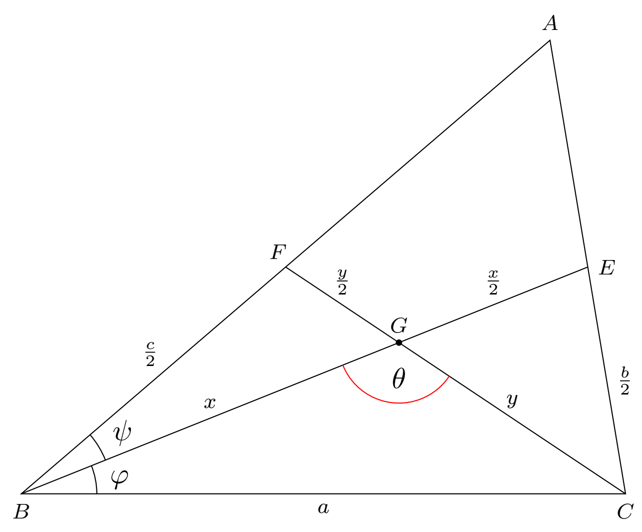
La desigualtat següent és una generalització de la desigualtat proposada a l'enunciat.

Es compleix:

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2},$$

on $\theta = \angle BGC$.

Siguin E, F els punts mitjans dels costats CA, AB de $\triangle ABC$. Posem $\varphi = \angle GBC$, $\psi = \angle FBG$, $x = BG$, $y = CG$. Llavors $GE = \frac{x}{2}$ i $GF = \frac{y}{2}$.



Del teorema del cosinus aplicat al triangle BGC, se'n dedueix que

$$y^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos\varphi \tag{19}$$

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta \tag{20}$$

i aplicat a $\triangle BGF$,

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + x^2 - cx\cos\psi \tag{21}$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + x^2 - xy\cos(\pi - \theta)\,. \tag{22}$$

Sumant (19) i (20) obtindrem la igualtat següent, equivalent i més senzilla:

$$0 = 2x^2 - 2ax\cos\varphi - 2xy\cos\theta.$$

Igualtat que dividida per $2x$ es pot escriure

$$\cos\varphi = \frac{x - y\cos\theta}{a}. \tag{23}$$

Anàlogament, sumant (21) i (22) podem aïllar $\cos\psi$ i ens queda

$$\cos\psi = \frac{2x + y\cos\theta}{c}. \tag{24}$$

D'altra banda,

$$\sin\varphi = \frac{y\sin\theta}{a}, \qquad \sin\psi = \frac{y\sin\theta}{c} \tag{25}$$

(això segueix del teorema del sinus aplicat als triangles BGC i FBG).
Es té:

$$\cot B = \cot(\varphi + \psi) = \frac{\cos(\varphi + \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}{\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi}.$$

Tenint present (23), (24) i (25), això s'escriu:

$$\cot B = \frac{2x^2 - y^2 - xy\cos\theta}{3xy\sin\theta}.$$

Anàlogament,

$$\cot C = \frac{2y^2 - x^2 - xy\cos\theta}{3xy\sin\theta}.$$

Sumant aquestes igualtats s'obtè:

$$\cot B + \cot C = \frac{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}{3xy\sin\theta}.$$

Tenint en compte que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ i usant la fórmula trigonomètrica de l'angle meitat, resulta:

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2xy - 2xy\cos\theta}{3xy\sin\theta} = \frac{2\,(1 - \cos\theta)}{3\sin\theta} = \frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}.$$

La igualtat esdevé si, i només si, $x = y$ i.e., si, i només si, les mitjanes corresponents als costats AB i CA de $\triangle ABC$ són iguals, i.e., si, i només si, el triangle ABC és isòsceles amb $b = c$.

Solució 4. Reprenent la notació emprada a la solució anterior: pel teorema del cosinus, $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - xy\cos(\pi - \theta)$, $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - xy\cos(\pi - \theta)$, d'on deduïm que $5a^2 - b^2 - c^2 = -18xy\cos\theta$.

Per tant, les mitjanes corresponents als costats AB i CA de $\triangle ABC$ són perpendiculars si, i només si,

$$5a^2 = b^2 + c^2.$$

Suposem $\theta = 90°$. Minimitzar la suma $\cot B + \cot C$, donada per (18), equival a maximitzar $bc \sin A$ o, equivalentment, maximitzar $(bc \sin A)^2$.

Calculem ara $(bc \sin A)^2$. Tindrem:

$$(bc \sin A)^2 = b^2c^2 - b^2c^2 \cos^2 A = b^2c^2 - b^2c^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2.$$

Substituint aquí $b^2 + c^2$ per la seva expressió, aquesta igualtat s'escriu

$$(bc \sin A)^2 = b^2c^2 - 4a^4. \tag{26}$$

D'això es desprèn que $(bc \sin A)^2$ serà màxim quan b^2c^2 sigui màxim. Ara bé, el terme b^2c^2 és el producte de dos factors la suma dels qual és constant $\left(= 5a^2\right)$ i, per tant, el valor màxim de b^2c^2 s'ateny per a $b^2 = c^2 \left(= \frac{5a^2}{2}\right)$.

Tindrem, doncs (per (26)):

$$(bc \sin A)^2 \leq \frac{5a^2}{2} \cdot \frac{5a^2}{2} - 4a^4 = \frac{9a^4}{4}.$$

És a dir:

$$bc \sin A \leq \frac{3a^2}{2}.$$

Tenint present (18), s'obté la desigualtat volguda. Es compleix la igualtat si, i només si, $b = c$.