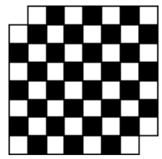
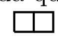
El mètode dels invariants

1) Tres persones, A, B i C, juguen una sèrie de partides d'un joc. En començar, A té 10 euros, B té 20 euros i C té 30 euros. A cada partida, el guanyador rep un euro de cada un dels altres jugadors. Si qualcun es queda sense doblers, continua jugant "a crèdit", és a dir, amb valors negatius. Pot ser que a qualque moment els tres jugadors tenguin 15 euros cadascun?

2) Considerau un escaquer usual de $8 \times 8 = 64$ caselles al que hem llevat dues caselles a cantons diagonalment oposats. Per exemple:



Demostrau que no podeu recobrir-lo amb peces com les de la figura següent (on cada quadrat de la peça ocupa exactament una casella del tauler, i les peces no es poden superposar): 

3) En aquest joc, començant amb un nombre natural qualsevol, podem efectuar qualsevol de les tres operacions següents:

- Sumar alguns dels seus dígits consecutius, i substituir-los pel resultat. Per exemple, a 3462489, podríem fer $6 + 2 + 4 = 12$ i substituir el 624 per 12: $3462489 \to 341289$.
- Descompondre qualque bocí en suma d'altres números, i substituir aquest bocí per la concatenació d'aquests nombres. Per exemple, a 3462489, podríem fer $46 = 20 + 4 + 22 + 0 + 0$ i substituir el 46 per 2042200: $3462489 \to 320422002489$.
- Permutar els dígits. Per exemple, $3462489 \to 6442893$.

El joc que us propòs és, donat dos nombres, mirar d'efectuar una seqüència d'operacions d'aquestes que passi d'un a l'altre. Per exemple, podem anar de 2458 a 100? Sí:

$$2458 \to 11458 \to 1108 \to 208 \to 280 \to 100.$$

Podeu anar de 2459 a 100?

4) Tenim una pastilla de xocolata de dimensions $m \times n$, i dos jugadors. Per torns, cada jugador pren una peça rectangular de xocolata i la xapa en dos bocins per la subdivisió entre els seus quadrats. El darrer jugador en jugar guanya. Qualcun dels dos jugadors té qualque estratègia guanyadora?

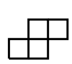
5) Distribuïm 2012 persones a les habitacions d'un hotel amb 100 habitacions. A cada minut, i mentre no totes les persones estiguin a la mateixa habitació, qualque persona se'n va de la seva habitació a una altra on hi hagi com a mínim el mateix nombre de persones que a la seva. Demostrau que, prest o tard, totes les persones es trobaran en una mateixa habitació.

---

6) Escrivim els nombres $1, 2, \ldots, 2012$ en filera i escrivim entremig d'ells signes $+$ o $-$ com volgueu. Pot ser el resultat final de l'operació que escriviu igual a 1?

7) Escrivim els nombres $1, 2, \ldots, 2012$ en un paper, i aleshores, a cada pas, triam dos nombres a, b, els esborram i els substituïm per $|a - b|$. Quan quedi només un nombre, serà forçosament parell, forçosament imparell, o pot ser qualsevol de les dues coses?

8) Tenim un tauler de $9 \times 9 = 81$ caselles quadrades. Quin és el nombre màxim de caselles d'aquest tauler que podem cobrir amb peces com les de la figura següent (aquestes figures són reversibles, i cada quadrat de la peça ocupa exactament una casella del tauler, i no es poden superposar):



9) Sobre un tauler infinit de caselles quadrades hi hem marcat un rectangle amb un dels costats de longitud (en caselles) un múltiple de 3. Col·locam sobre cada casella d'aquest rectangle una fitxa, i deixam buides la resta de caselles. Aquestes fitxes es poden matar les unes a les altres: una fitxa pot botar per sobre de la seva veïna de dalt, de baix, de la dreta o de l'esquerra (però no en diagonal!) si la casella següent en aquesta direcció està buida, i aleshores mata la fitxa sobre la que bota.

Demostrau que, jugueu com jugueu, mai no pot quedar una única fitxa sobre el tauler.

10) A cada un dels vèrtexs d'un cub li assignam un 1 o un -1, i assignam a cada una de les cares el producte dels quatre nombres dels seus vèrtexs. Podem fer una assignació inicial de nombres als vèrtexs de manera que la suma dels 14 nombres (8 dels vèrtexs més 6 de les cares) sigui 0?

11) En una taula disposam 13 cartes vermelles i 13 cartes negres, i jugam el solitari següent. A cada pas del joc, triam dues cartes a l'atzar i efectuam sobre elles un dels tres moviments següents:

- Si totes dues són negres, les substituïm per dues cartes vermelles
- Si totes dues són vermelles, les eliminam
- Si una és negra i l'altra vermella, llevam la carta negra i deixam la vermella.

Demostrau que amb qualsevol seqüència de jugades, sempre arribau a tenir només una carta vermella sobre la taula.

12) Tenim un escaquer 8×8 amb les seves caselles blanques i negres usuals. Ara podem canviar els colors de conjunts de caselles de les tres maneres següents:

- Podem canviar els colors de totes les caselles d'una filera
- Podem canviar els colors de totes les caselles d'una columna
- Podem canviar els colors de totes les caselles d'un quadrat 2×2

Podem aconseguir una única casella blanca?

13) Ens donen n punts blaus i n punts vermells en el pla, de manera que no n'hi hagi 3 d'alineats. Demostrau que sempre podem dibuixar n segments lineals que uneixin un punt plau amb un punt vermell sense tallar-se.

14) Escrivim diversos nombres naturals en un paper. A cada pas, triam dos nombres a l'atzar i

- Si un és múltiple de l'altre, n'esborram un
- Si cap dels dos no és múltiple de l'altre, els substituïm pel seu màxim comú divisor i el seu mínim comú múltiple.

Demostrau que sempre acabam amb un únic nombre.

15) En un recinte tancat hi tenim un conjunt de partícules que poden estar en tres estats diferents: positiu, negatiu i neutre. En començar, hi ha 30 partícules positives, 10 negatives i 17 neutres. Les partícules es mouen, i quan dues partícules de diferent tipus xoquen, totes dues es converteixen en partícules del tercer tipus. Existeix qualque seqüència de xocs que faci que al final totes les partícules siguin del mateix tipus?

16) En una illa hi tenim 13 camaleons grisos, 15 de marrons i 17 de vermells. Quan dos camaleons de colors diferents es troben, tots dos canvien al tercer color. Quan dos camaleons del mateix color es troben, no canvien de color. Cap altre canvi de color és possible. És possible que després d'una seqüències d'encontres, tots els camaleons siguin del mateix color?

17) Sobre una circumferència hi marcam $3n$ punts, i a cada punt hi escrivim un 0 o un 1, com vulguem. A cada pas, canviam un 1 per un 0 en un punt, i canviam les xifres als dos punts dels costats. Demostrau que si partim d'una configuració que només té un 1, mai no podem arribar a una configuració amb 0 a tots els punts.

18) Tenim un estadi buit. A cada minut, una persona entra o dues persones surten de l'estadi. Després d'un dia, pot ser que a l'estadi hi quedin 250 persones?

19) Tenim una taula $m \times n$ de nombres reals Quan la suma dels nombres d'una filera o d'una columna és < 0, podem canviar de signe tots els nombres d'aquesta filera o columna. Demostrau que si iteram aquesta operació, acabam obtenint una taula on totes les fileres i totes les columnes tenen suma ≥ 0.

20) Tenim una pastilla de xocolata de dimensions $m \times n$, i dos jugadors. Per torns, cada jugador pren una peça rectangular de xocolata, la xapa en dos bocins per la subdivisió entre els seus quadrats i es menja un dels bocins. El darrer jugador en jugar guanya. Qualcun dels dos jugadors té qualque estratègia guanyadora?