El principi del colomer

El *principi del colomer*, o *de les caselles* o *de Dirichlet*, és l'observació òbvia que si heu de repartir n coloms en m gàbies i $m < n$, qualque gàbia haurà de contenir més d'un colom. Més en general, si heu de repartir n coloms en m gàbies i $n > k \cdot m$, qualque gàbia haurà de contenir més de k coloms.

1) Tenim una bossa amb 50 bolles blanques i 50 bolles negres. Quin és el nombre mínim de bolles que hem de treure per garantir que en traurem 3 de blanques? I quin és el nombre mínim de bolles que hem de treure per garantir que en traurem 3 del mateix color?

La resposta a la primera pregunta és 53: podria ser que traguéssim les 50 bolles negres abans de completar les 3 blanques. Però la resposta a la segona pregunta és 5: si tenim cinc bolles (coloms) i dos colors (gàbies), com a mínim 3 bolles han de ser del mateix color; i en canvi, amb 4 bolles en podríem tenir 2 de cada color.

2) Demostrau que, en qualsevol classe de 13 estudiants, sempre n'hi ha com a mínim 7 del mateix sexe.

Si només n'hi hagués com a màxim 6 de cada sexe, en total hi hauria com a màxim 12 estudiants.

3) Demostrau que, en qualsevol grup de 13 persones, sempre n'hi ha com a mínim 2 de nascudes el mateix mes (possiblement de diferents anys).

Com que $13 > 12$, a algun mes li han de tocar 2 o més persones.

4) Demostrau que a Palma hi ha com a mínim 2 persones amb el mateix nombre de cabells.

S'estima que el nombre màxim de cabells que pot tenir una persona al cap és d'uns 100 000 a 150 000 (2200 per cm^2). Com que a Palma hi ha uns 420 000 habitants, segur que dos han de tenir el mateix nombre de cabells.

5) Demostrau que en un conjunt de 11 nombres naturals, sempre n'hi ha dos que difereixen en un múltiple de 10.

Els nombres poden acabar en 0,1,..., 9: 10 possibles terminacions. Per tant, com a mínim dos dels nostres 11 nombres acabaran igual: la diferència serà un múltiple de 10.

6) Demostrau que en un conjunt de 13 nombres naturals, sempre n'hi ha dos tals que la diferència és un múltiple de 12.

7) Demostrau que, en qualsevol conjunt A de $n+1$ nombres naturals, sempre hi ha com a mínim dos nombres $a, b \in A$ tals que $a - b$ és divisible per n.

És el mateix raonament. Hi ha n possibles residus de dividir un nombre per n: $0, 1, \ldots, n-1$. Llavors, donats $n+1$ nombres naturals, n'hi haurà almenys 2 que donin el mateix residu en dividir-los per n. Siguin a i b dos d'aquests nombres. Aleshores, $a - b$ és divisible per n (si $a = q_1 \cdot n + m$ i $b = q_2 \cdot n + m$, aleshores $a - b = (q_1 - q_2)n$).

8) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té dues potències diferents tals que la seva diferència és divisible per 2013.

Considerau el conjunt $\{n^0, n^1, \ldots, n^{2013}\}$. Pel que acabam de veure, d'aquests 2014 nombres, n'hi haurà com a mínim 2 tals que la seva diferència és divisible per 2013.

9) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té un múltiple format per una seqüència d'uns seguida d'una seqüència de zeros.

Sabem que en un conjunt de $n+1$ nombres, sempre n'hi ha dos tals que la seva diferència és divisible per n. Considerau ara el conjunt

$$\{1, 11, 111, 1111, \ldots, \overbrace{11\ldots11}^{n+1}\}.$$

D'aquests $n+1$ nombres, n'hi haurà com a mínim dos tals que la seva diferència sigui divisible per n. Siguin $\overbrace{1\ldots1}^{k_1}$ i $\overbrace{1\ldots1}^{k_2}$, amb $k_2 > k_1$, una d'aquestes parelles. Observau aleshores que

$$\overbrace{1\ldots1}^{k_2} - \overbrace{1\ldots1}^{k_1} = \overbrace{1\ldots1}^{k_2-k_1}\overbrace{0\ldots0}^{k_1}$$

té la forma demanada.

10) Demostrau que qualsevol subconjunt de $2n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ sempre conté tres nombres consecutius.

Repartim els nombres del conjunt $\{1, \ldots, 3n\}$ en els n conjunts

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \ldots, \{3n-2, 3n-1, 3n\}.$$

Si ens donen un conjunt de $2n+1$ nombres de $\{1, \ldots, 3n\}$, n'hi haurà almenys 3 que pertanyin al mateix conjunt d'aquests: seran tres nombres consecutius.

11) Sigui $C = \{r_1, \ldots, r_{n+1}\}$ un conjunt qualsevol format per $n+1$ nombres reals r_i tals que $0 \leq r_i < 1$. Demostrau que hi ha com a mínim dos elements r_i, r_j de C tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

Dividiu el segment $[0, 1[$ en els n segments disjunts

$$\Big[0, \frac{1}{n}\Big[, \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big[, \Big[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\Big[, \ldots, \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big[.$$

Si ens donen $n+1$ nombres dins $[0, 1[$, com a mínim dos pertanyeran al mateix bocí $[k/n, (k+1)/n[$ i per tant estaran a distància $< 1/n$.

---

12) Donats 12 nombres diferents de 2 xifres, sempre n'hi ha dos tals que la seva diferència és un nombre de 2 xifres de la forma aa.

Dos d'aquests nombres tindran la diferència divisible per 11, i serà de dues xifres.

13) Demostrau que 2013 té un múltiple de la forma $111\ldots1$.

Ja hem vist que 2013 té un múltiple de la forma

$$\overbrace{1\ldots1}^{k_1}\overbrace{0\ldots0}^{k_0} = \overbrace{1\ldots1}^{k_1} \cdot 10^{k_0}.$$

Com que 2013 és coprimer amb 10, si 2013 divideix aquest producte per força ha de dividir el factor $\overbrace{1\ldots1}^{k_1}$.

14) Siguin a, d, n nombres naturals tals que cap dels nombres $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ no és divisible per n. Demostrau que d i n no són coprimers (que no tenen cap divisor primer en comú).

Suposem que cap de $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ no és divisible per n. Com que hi ha n nombres i els possibles residus en dividir-los per n són $1, \ldots, n-1$ (no pot donar 0), dos d'aquests nombres donaran el mateix residu i per tant n en dividirà la diferència, que tindrà la forma kd amb $k < n$. Naturalment, això implica que n i d no són coprimers: en cas contrari, n hauria de dividir k.

15) Demostrau que, donats 8 nombres naturals entre 1 i 15, sempre n'hi ha tres parelles que tenen la mateixa diferència (positiva).

Les possibles diferències entre dos nombres més petits o iguals que 15 són $1, 2, \ldots, 14$. Donats 8 nombres, formen $\binom{8}{2} = 28$ parelles i per tant donen lloc a 28 diferències. Per tant semblaria que en podríem assignar dues parelles a cada possible diferència. Però no: a la caixa corresponent a la diferència 14 només hi pot haver una parella: (1,15). Per tant hem de repartir les altres 27 parelles en 13 diferències, i veiem que tres parelles han d'anar a parar a la mateixa diferència.

16) Demostrau que tot conjunt de 10 nombres naturals conté qualque subconjunt no buit tal que la seva suma és un múltiple de 10.

Siguin $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$ els 10 nombres considerats. Considerem ara els 10 nombres

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

Si algun és divisible per 10, ja estam. Si cap no ho és, els possibles residus en dividir-los per 10 són $1, 2, \ldots, 9$, i per tant dos donen el mateix residu, i la seva diferència serà divisible per 10. Però

$$s_j - s_i = a_{i+1} + \cdots + a_j$$

i ja tenim una suma divisible per 10.

17) Demostrau que si escrivim els nombres $1, 2, \ldots, 10$ en un cercle, en l'ordre que vulguem, sempre n'hi ha 3 de consecutius que sumen 17 o més.

Sabem que $1 + \cdots + 10 = 55$. Per tant, si a cada x li sumam l'anterior i el posterior en el cercle, diguem-ne s_x, i sumam aquestes sumes, $s_1 + \cdots + s_{10}$, cada nombre del cercle apareix exactament a tres sumes, i per tant

$$s_1 + \cdots + s_{10} = 3(1 + \cdots + 10) = 165$$

Però aleshores si cada $s_x \leq 16$, tenim que $s_1 + \cdots + s_{10} \leq 160$, i no pot ser.

18) Demostrau que, donats 5 punts sobre una esfera, sempre existeix un hemisferi tancat (que conté el corresponent meridià) que en conté com a mínim 4.

Prenem dos punts i traçam el meridià que passa per aquests dos punts, el qual divideix l'esfera en dos hemisferis tancats. Dels altres 3 punts, dos hauran de caure en un d'aquests dos hemisferis, i juntament amb els dos que han determinat el meridià, en fan quatre.

19) Sigui $A = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100\} = \{3k + 1 \mid k = 0, \ldots, 33\}$. Demostrau que si prenem 20 nombres d'aquest conjunt, sempre n'hi haurà dos de diferents que sumen 104.

Com que $104 = 3{\cdot}34{+}2$, hi ha 17 parelles d'aquests nombres que sumen 104: $\{4, 100\}, \{7, 97\}$, $\ldots$, $\{49, 55\}$. A banda d'aquestes parelles, l'1 i el 52 no sumen 104 amb ningú. Considerem les 19 caixes

$$\{1\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \ldots, \{49, 55\}, \{52\}$$

Si prenem 20 nombres, dos hauran de pertànyer a la mateixa caixa: hauran de ser una parella de nombres que sumin 104.

20) Demostrau que qualsevol subconjunt de $n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ conté qualque parella de nombres diferents tal que un divideix l'altre.

Siguin $a_1, \ldots, a_{n+1}$ els nombres escollits, i escrivim cada un $a_i = 2^{k_i} b_i$ amb b_i imparell. Aleshores $b_1, \ldots, b_{n+1}$ són nombres imparells que també estan entre 1 i $2n$, i com que entre aquests dos nombres només hi ha n nombres imparells diferents, dos hauran de ser iguals. Si ara $b_i = b_j = b$, tenim que $a_i = 2^{k_i} b$ i $a_j = 2^{k_j} b$, i el més petit dividirà el més gran.

21) Demostrau que per qualsevol n sempre hi ha una potència de 2013 que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

Considerem les potències successives 2013^k i prenguem el seu residu mòdul 10^n. Aleshores n'hi haurà dues que tindran el mateix residu, i per tant llur diferència serà divisible per 10^n. Suposem que

$$10^n \mid 2013^j - 2013^i = 2013^i(2013^{j-i} - 1)$$

Com que 2013 i 10 són coprimers, això implica que $10^n \mid 2013^{j-i} - 1$ i per tant $2013^{j-i} = 10^n \cdot N + 1$, que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

22) Seleccionam 340 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau que podem situar un cub petit de costat de longitud 1 dins el cub gran de tal manera que no contingui cap dels punts seleccionats.

Subdividim el cub en $7^3 = 343$ cubs de costat 1. Com que tenim 340 punts, qualcun d'aquests cubs no contindrà cap punt d'aquests.

23) Seleccionam 350 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau sempre n'hi ha dos que estan a distància menor que 1.75.

Subdividim el cub en $7^3 = 343$ cubs de costat 1. Com que tenim 350 punts, dos d'aquests punts estaran dins el mateix cub. La distància màxima dins aquest cubet és la diagonal, que és $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, i per tant dos punts dins un cub d'aquests estan a distància menor que 1.75.

24) Sigui S un conjunt qualsevol de k nombres naturals, tots $\leq n$, i suposem que $k > (n+1)/2$. Demostrau que existeixen $a, b \in S$ (pot ser que $a = b$) tals que $a, b \in S$.

Sigui a_1 l'element més petit de S, i considerem les diferències

$$D = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1\}.$$

Aleshores entre D i S tenim $2k-1 > n$ nombres naturals $\leq n$, i com que $2k-1 > n+1-1 = n$, n'hi ha d'haver dos de repetits. Com que tots els nombres de D són diferents, i tots els nombres de S són diferents, concloem que $D \cap S \neq \emptyset$. És a dir, existeixen k, j tals que $a_k - a_1 = a_j$ i per tant $a_k = a_1 + a_j$.

25) Tenim 6 persones que poden haver parlat o no per telèfon. Demostrau que o n'hi ha 3 que han parlat totes amb totes, o n'hi ha 3 que cap ha parlat amb cap.

Fem-ho gràfic. Dibuixau 6 punts que representen les 6 persones, uniu cada parella de persones amb una línia blava si han parlat per telèfon i vermella si no hi han parlat. L'enunciat diu que hem de trobar un triangle amb els tres costats del mateix color (blau, 3 persones que han parlat entre elles; vermell, 3 persones que no han parlat). Preneu una persona qualsevol: d'ella parteixen 5 línies, i per tant 3 tindran el mateix color. Si entre qualque parella de les persones a l'altre costat d'aquestes tres línies hi ha una línia d'aquest mateix color, ja tenim un triangle d'aquest color. Si no, les tres persones aquestes formen un triangle de l'altre color.

26) Demostrau que tot nombre de 16 xifres conté una seqüència de una o més xifres consecutives el producte de les quals és un quadrat perfecte.

Siguin $a_1, \ldots, a_{16}$ les xifres del nombre donat, llegides d'esquerra a dreta. Posem $x_0 = 1$ i $x_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_i$, per a $i = 1, \ldots, 16$. Aleshores cada x_i tindrà la forma $2^{q_i} 3^{q_i} 5^{r_i} 7^{s_i}$. Ara, de vectors de paritats de longitud 4 n'hi ha 16, i tenim 17 nombres x_i. Per tant, dos d'aquests nombres, diguem x_k i x_l amb $l > k$, tindran els exponents de les mateixes paritats. Aleshores el quocient x_l/x_k tindrà tots els exponents parells, i per tant serà un quadrat perfecte, i és igual a $a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_l$.

27) Quin és el nombre màxim de reis que podem situar en un escaquer de manera que no n'hi hagi cap parella que es matin mútuament?

Si dividim l'escaquer en 16 quadrats 2×2 i situam un rei al cantó inferior esquerre de cada quadrat, obtenim 16 reis que no es maten entre ells. Ara bé, si volguéssim posar 17 reis sobre l'escaquer, 2 haurien d'estar dins un mateix quadrat d'aquests i es matarien entre ells. Per tant el màxim és 16.

28) En un torneig de n jugadors que es desenvolupa al llarg d'un mes, cada un juga amb tots els altres exactament una vegada. Cada partida es juga quan va bé als dos jugadors, sense calendari fixat. Demostrau que, en qualsevol moment del mes, hi ha sempre dos jugadors que han jugat el mateix nombre de partides.

A cada moment, els nombres possibles de partides jugades per cada jugador són $0, \dots, n-1$. Ara bé, si qualque jugador ha jugat 0 partides, és impossible que un altre jugador n'hagi jugat $n-1$. Per tant en cada moment hi ha només $n-1$ nombres diferents de partides jugades per cada jugador, i com que hi ha n jugadors, dos han jugat el mateix nombre de partides.

29) Escollim 20 nombres naturals entre 1 i 69. Demostrau que entre les seves diferències hi ha com a mínim 4 nombres iguals.

Siguin $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ aquests nombres i considerem

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) = a_{20} - a_1 \leq 68$$

Suposem ara que entre les 19 diferències $a_{i+1} - a_i$ no n'hi ha 4 d'iguals. Aleshores

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 6 + 7 = 70.$$

Contradicció.

30) Sigui S un conjunt de 10 nombres de 2 xifres. Demostrau que sempre podem escollir dos subconjunts disjunts de S tals que les sumes de llurs elements són les mateixes.

Les possibles sumes de subconjunts de fins a 10 nombres triats entre 10 i 99 van des de 10 (la del conjunt format només pel 10) fins a

$$99 + 98 + \cdots + 90 = 945$$

Hi ha per tant 936 sumes possibles de subconjunts de S. D'altra banda, el nombre de possibles subconjunts no buits d'un conjunt de 10 elements és

$$2^{10} - 1 = 1023.$$

Per tant, S contindrà dos subconjunts diferents amb la mateixa suma. Si llevam la intersecció d'aquests dos conjunts a cada un, obtenim dos subconjunts disjunts amb la mateixa suma.

31) Siguin $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ i $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ dues reordenacions dels nombres $1, 2, \dots, 100$. Demostrau que entre els productes $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{100}b_{100}$ sempre n'hi ha dos amb el mateix residu mòdul 100.

Suposem que els 100 residus són diferents. En particular, 50 d'aquests productes són parells i 50 imparells (del contrari, dos haurien de repetir-se). Els 50 productes imparells empren nombres imparells de cada costat, i per tant els empren tots. Això implica que els 50 productes parells són de fet productes de nombres parells, i per tant múltiples de 4. Però de residus de múltiples de 4 mòdul 100 només n'hi ha 25, i per tant n'hi ha d'haver de repetits entre aquests.

32) Dins un conjunt de 52 nombres naturals qualssevol, sempre hi ha almenys una parella tal que la seva suma o la seva diferència és divisible per 100.

Considerem les 51 capses següents: a $C_{00,00}$ hi posarem els nombres que acaben en 00 (comptant zeros a la dreta); a $C_{01,99}$ hi posarem els nombres que acaben en 01 o en 99; a $C_{02,98}$ hi posarem els nombres que acaben en 01 o en 99;..., a $C_{49,51}$ hi posarem els nombres que acaben en 49 o en 51; i a $C_{50,50}$ hi posarem els nombres que acaben en 50.

Com que tenim 52 nombres, dos hauran de caure a la mateixa capsa d'aquestes. I ara, si els dos nombres acaben igual, la diferència és divisible per 100, i si acaben diferent, la suma és divisible per 100.

33) Escrivim els nombres 1 a 101 en l'ordre que volguem. Demostrau que sempre en podem tatxar 90 de manera que els 11 que queden formin una seqüència creixent o decreixent.

Sigui $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ l'ordenació dels nombres $1, 2, \ldots, 101$ triada. Diguem una subseqüència d'aquesta seqüència de nombres a qualsevol seqüència $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$ amb $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$. Ens demanen que demostrem que la nostra ordenació conté qualque subseqüència de longitud 11 que és creixent o decreixent.

Per a cada nombre m, sigui L_m la longitud màxima d'una subseqüència creixent que acabi amb a_m i R_m la longitud màxima d'una subseqüència decreixent que comenci amb a_m. Per a cada p, q diferents, ha de passar que $L_p \neq L_q$ o $R_p \neq R_q$. En efecte, suposem que $p < q$, de manera que a_p apareix a l'esquerra de a_q. Aleshores, si $a_p < a_q$ tenim que $L_q \geq L_p + 1$, i si $a_p > a_q$, tenim que $L_p \geq L_q + 1$.

Considerem per tant les parelles (L_m, R_m). Totes són diferents, i per tant n'hi ha 101. Ara si no existís cap subseqüència creixent o decreixent de 11 elements, tindríem que $L_m, R_m \leq 10$ per a cada m i per tant el nombre possible de parells (L_m, R_m) seria com a molt 100. Contradicció.

34) Una societat internacional té membres de 6 països diferents. La llista dels seus membres té 2012 noms, i els numeram 1,2,..., 2012. Demostrau que hi ha qualque membre tal que el seu nombre és o bé la suma de dos nombres de membres del seu país, o el doble del nombre d'un membre del seu país.

Suposem que no. Com que $2012/6 = 335.33$, qualque país, diguem-ne P_1, tindrà com a mínim 336 nombres,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{336}.$$

Aleshores cap diferència $a_{336} - a_i$ és d'aquest país (o del contrari a_{336} seria la suma de dos nombres d'aquest país) i per tant totes aquestes diferències són dels altres països. Ara, com que $335/5 = 67$, algun dels altres països, diguem-ne P_2, conté com a mínim 67 d'aquestes diferències

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{67}.$$

Aleshores cap diferència $b_{67} - b_i$ és d'aquest país (o del contrari b_{67} seria la suma de dos nombres d'aquest país), i tampoc és de P_1, perquè

$$a_j = b_{67} - b_i = (a_{336} - a_{k_{67}}) - (a_{336} - a_{k_i}) = a_{k_i} - a_{k_{67}} \Rightarrow a_{k_i} = a_j + a_{k_{67}}$$

Per tant totes aquestes diferències pertanyen als altres quatre països. Ara, com que $66/4 = 16.5$, algun dels altres països, diguem-ne P_3, conté com a mínim 17 d'aquestes diferències

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{17}.$$

Aleshores cap diferència $c_{17}-c_i$ és d'aquest país (o del contrari c_{17} seria la suma de dos nombres d'aquest país), i tampoc és de P_2 ni de P_1:

$$\begin{aligned} b_j &= c_{17} - c_i = (b_{67} - b_{k_{17}}) - (b_{67} - b_{k_i}) = b_{k_i} - b_{k_{17}} \Rightarrow b_{k_i} = b_j + b_{k_{17}} \\ a_j &= c_{17} - c_i = (b_{67} - b_{k_{17}}) - (b_{67} - b_{k_i}) = b_{k_i} - b_{k_{17}} \\ &= (a_{336} - a_{k_{k_i}}) - (a_{336} - a_{k_{k_{17}}}) = a_{k_{k_{17}}} - a_{k_{k_i}} \Rightarrow a_{k_{k_{17}}} = a_j + a_{k_{k_i}} \end{aligned}$$

Per tant aquestes diferències pertanyen als altres tres països. Ara, com que $17/3 = 5.66$, algun dels altres països, diguem-ne P_4, conté com a mínim 6 d'aquestes diferències

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_6.$$

Aleshores cap diferència $d_6 - d_i$ és d'aquest país i tampoc és de P_3, P_2 o P_1 (mateix argument), i per tant aquestes diferències pertanyen als altres dos països. Ara, com que $6/2 = 3$, algun dels altres països, diguem-ne P_5, conté com a mínim 3 d'aquestes diferències

$$e_1 < e_2 < e_3$$

Aleshores $f_1 = e_3 - e_1$ ni $f_2 = e_3 - e_2$ no són ni d'aquest país ni tampoc de P_4, P_3, P_2 o P_1 (mateix argument), i per tant totes dues són de P_6, i per l'argument usual $f_1 - f_2$ no és de cap de $P_6, \ldots, P_1$, i això és impossible, perquè serà un nombre entre 1 i 2012 i ha de pertànyer a algun dels 6 països.