5 de novembre de 2011, Castell de Bellver, Jornada Kepler

Conjectures: a la frontera entre el saber i la intuició

Petit recull a càrrec de Josep Lluís Pol, Cesc Rosselló, Daniel Ruiz i Maria Triay

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX

1611 La conjectura de Kepler (Weil der Stadt, Alemanya, 1571-1630) La distribució més compacta que es pot fer amb esferes és la que forma un tetraedre regular (xarxa cúbica centrada). Thomas Hales ho demostrà el 1998. De totes maneres, els experts només poden afirmar que estan segurs al 99% perquè la demostració requereix el treball d'ordinador.

- Enllaç recomanat: Article "Sobre la conjetura de Kepler, y su demostración", divulgaMAT.

1637 El darrer teorema de Fermat (Beaumont de Lomagne, França, 1601-1665) L'equació $x^n + y^n = z^n$ no té solucions enteres no trivials quan $n > 2$. Si $n = 2$ és el Teorema de Pitàgores. Llegint l'aritmètica de Diofant, Fermat escrigué en el marge del llibre: "He trobat una demostració vertaderament meravellosa d'aquesta proposició, però no hi cap en aquest marge tan estret." Vàrem haver d'esperar que Andrew Wiles dedicàs 7 anys de la seva vida per demostrar-ho el 1994.

1641 La conjectura de Mersenne (Oizé, França, 1588-1648) Conjecturà que només la llista que ell donava de nombres primers de la forma $M_n = 2^n - 1$ eren els que existien (amb exponents primers menors o iguals que 257). No ho eren M_{67} ni M_{257} i, en canvi, no havia inclòs M_{61}, M_{89} i M_{107}. A més, hi ha nombres de Mersenne superiors que també són primers.

1742 La conjectura de Goldbach (Königsberg, Prúsia, 1690-1764) Qualsevol nombre enter major que 5 es pot escriure com a suma de tres primers. Euler la replantejà dient que qualsevol parell major que dos és la suma de dos primers. S'ha comprovat almanco fins 12×10^7.

1769 La conjectura d'Euler (Basilea, Suïssa, 1707-1783) Per a cap $n > 3$ no existeixen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (naturals majors que zero) tals que $(x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{n-1})^n = (x_n)^n$. El mateix Euler ho havia demostrat per a $n = 3$, que és també un cas particular del darrer teorema de Fermat. L'any 1966, L. Lander i T. Parkin trobaren un contraexemple:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

1779 La conjectura dels quadrats grecollatins d'Euler (Basilea, Suïssa, 1707-1783) Un quadrat grecollatí d'ordre n és aquell quadrat format per n-files i n-columnes, amb n^2 elements, tal que en cap fila ni cap columna es repeteix cap de les dues característiques que tenen els elements. Euler parlava de 6 exèrcits i 6 graduacions d'oficials. Conjecturà que no hi havia solució per a $n = 6$ (Gaston Tarry ho demostrà el 1901) ni per a $n = 4k + 2$ (cosa que refutaren Bose, Shikhande i Parker el 1959 en trobar un contraexemple d'ordre 22. Excepte per $n = 2$ i $n = 6$, sempre existeixen quadrats grecollatins.

1844 La conjectura de Catalan (Bruges, França, 1814-1894) El 8 i el 9 són els únics nombres consecutius que es poden escriure com a potències de nombres enters. Realment hi ha una versió restringida molt anterior (Levi ben Gerson, 1288-1344) que deia que 8 i 9 eren les úniques potències consecutives de 2 i 3. L'any 2002 va ser resolta per Preda Mihailescu.

1849 La conjectura dels nombres primers bessons de De Polignac (1817-1890) Existeixen infinites parelles de nombres primers bessons, és a dir, aquells separats per dues unitats. Realment va fer una conjectura més general i és que sempre hi haurà infinits parells de primers que distaran un nombre parell donat. Varen fer aportacions a la conjetura Paul Erdös, Jingrun, o Hardy i Littlewood que, per la seva part, formularen la seva pròpia conjectura sobre la distribució de nombres primers bessons.

1852 El teorema dels quatre colors de Francis Guthrie (Londres 1831-1899) Quatre colors sempre són suficients per pintar qualsevol mapa possible sense que hi hagi el mateix color als dos costats de la frontera (un punt no se considera frontera). El 1976 Kenneth Appel i Wolfgang Haken el demostraren amb l'ajut d'un ordinador que provava milers de casos possibles. Fou el primer. Realment en la cartografia no ha estat mai necessari minimitzar els colors.

1859 La hipòtesi de Riemann (Breselenz, Alemanya, 1826-1866) Relacionada amb la teoria dels nombres, la funció zeta de Riemann és de gran utilitat per estudiar les propietats dels nombres primers.

1874 La hipòtesi del continu de Georg Cantor (Sant Petersburg, Rússia, 1845-1918) És un dels problemes més importants de la història recent per la novetat en el tractament de conceptes lògics i sobre la teoria de conjunts. Influí de forma important en Rusell i Whitehead. De qualque manera, Cantor elaborà la teoria que permet distingir entre infinits diferents. Els nombres transfinits ens permeten comparar la grandària de diferents conjunts infinits. La hipòtesi del cotinuu afirma que si àlef-zero és el transfinit dels nombres enters i àlef-u és el dels nombres reals, no hi ha cap conjunt amb un àlef intermig. S'ha demostrat que és consistent suposar que o bé és certa (Gödel) o bé que és falsa (Cohen) pel que és independent dels axiomes de la teoria de conjunts.

1893 La conjectura de Sylvester (Londres, 1814-1897) Donat un conjunt finit de punts en el pla, si no estant tots alineats existeix almanco una recta que passa només per dos punts del conjunt. Paul Erdös estudià el problema però fou l'hongarès Tibor Gallai qui ho demostrà el 1944.

1904 La conjectura de Poincaré (Nancy, França 1854-1912) Conjectura molt important en el camp de la topologia i que fa referència a la quarta dimensió. L'Institut Clay de Matemàtiques oferí 1 milió de dòlars per a la seva demostració. El 2002 i 2003 Grigori Perelman demostrà la conjectura. El 2006 fou nominat a la medalla Fields que no recollí. Tampoc no ha cobrat el premi Clay.

- Enllaços recomanats:

- Vídeo YouTube "The Poincaré Conjecture".
- `http://gaussianos.com/explicacion-del-teorema-de-poincare-perelman/`

1937 La conjectura de Collatz (Ansberg, Alemanya, 1910-1990) Aquesta conjectura, posada moltes vegades com exemple de caos, afirma que qualsevol nombre natural arribarà sempre a l'1 si aplicam reiteradament la següent transformació: si és parell es fa la meitat i, si és senar, es multiplica per tres i se li suma la unitat. Al resultat, se torna a aplicar la mateixa transformació, i així succesivament. En el cas del 8, basta repetir el procés 3 vegades. En el cas del 10, basten 5 vegades, però en el cas del 27, són necessàries 112 iteracions. S'ha comprovat fins a 5×10^{18}.

1971 La conjectura P versus NP Fou introduïda per Stephen Cook, informàtic i matemàtic. És un dels sis problemes del mil·leni encara per resoldre que l'Institut Clay premiarà amb un milió de dòlars a qui ho aconsegueixi. És segurament el problema matemàtic obert més important per les seves possibles implicacions teòriques i aplicacions pràctiques. Les sigles P i NP corresponen a graus de complexitat.

- Enllaç als problemes del mil·leni `http://www.claymath.org/millennium/`

1985 La conjectura d'Andrica (Hunedoara, Romania, 1956) Si a mitjans del s. XIX Polignac conjecturava que hi havia infinites parelles de primers bessons, el 1985 Andrica conjecturava sobre la grandària dels espais entre primers consecutius. Concretatment, digué que la diferència entre les arrels quadrades de dos primers consecutius és sempre menor que u. El 2009, el forat més gran conegut entre dos primers consecutius tenia una longitud de 337 446 nombres naturals.

1985 La conjectura ABC de David Masser (Londres, 1948) **i Joseph Oesterlé** (Alsace, França, 1954). És segurament la conjectura sobre teoria de nombres més important i d'on pengen moltes altres conjectures famoses. Si aquesta es demostràs, caurien la majoria de les altres com peces d'un dòmino. Per enunciar-la s'ha de definir primer la part sense quadrat (*sqp*) d'un enter, que és aquell nombre format per la multiplicació de tots els seus factors primers eliminant-ne les repeticions o potències. $[sqp(12) = 2 \cdot 3 = 6,\ spq(30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30]$. Siguin A i B dos nombres naturals sense factors comuns i $C = A + B$. La conjectura afirma que la funció $\dfrac{[spq(A \cdot B \cdot C)]^n}{C}$ assoleix un mínim si n és qualsevol real major que 1.

No existeixen nombres perfectes senars Devers l'any 300 aC, Euclides defineix al llibre IX un nombre perfecte com aquell que és igual a la suma dels seus divisors (excepte ell mateix). Així, 6 és perfecte perquè $6 = 1 + 2 + 3$. Tots els nombres perfectes coneguts són parells. La conjectura afirma simplement que no n'hi ha de senars. El juny de 2010 es coneixien 47 nombres perfectes. El darrer era un nombre de 25 956 377 xifres.

- Enllaç a tots els nombres perfectes coneguts: `http://amicable.homepage.dk/perfect.htm`

Cites

- "Les preguntes són el motor de la ciència". (Jordi Wagensberg, exdirector del Museu de la Ciència de Barcelona)
- "Per la lògica provam, per la intuïció inventam." (Henri J. Poincaré)
- "Alguns problemes matemàtics fàcils de plantejar destaquen, a pesar de la seva senzillesa, perquè de bell antuvi han esquivat la seva demostració [...] Un problema seminal pot obrir camins intel·lectuals que segueixen explorant-se molts d'anys després." (Josep Malkevitch, extret de Clifford A. Pickover)
- "Les matemàtiques no són un llibre confinat dintre d'unes tapes. Tampoc una mina els tresors de la qual omplen només un limitat nombre de vetes. No tenen límits. Les seves possibilitats són tan infinites com els mons que s'acaramullen i multipliquen sens parar davant la mirada de l'astrònom." (Josep Malkevitch, extret de Clifford A. Pickover)

Sempre hi ha hagut una pregunta abans. Moltes d'aquestes es perden en la nit dels temps. Moltes, també, han estat contestades per les mateixes persones que les han formulades. Hi ha, emperò, un grapat de preguntes que han esdevingut famoses perquè, sense poder-ho demostrar, alguns savis s'han aventurat a donar-los resposta. És el terreny de la intuïció. Una aventura que de vegades ha confirmat que els grans també s'equivoquen, i d'altres ha servit per desenvolupar les matemàtiques fins a límits insospitats, de vegades amb molt poca relació amb el problema original.

- Hi ha problemes d'enunciat senzill que són extramadament difícils de demostrar.
- Els savis també s'equivoquen.
- L'intent de solució d'aquests problemes genera un ingent coneixement matemàtic.
- Queden moltes coses per descobrir i demostrar.

Un bon llibre de divulgació

Pickover, Clifford A. (2009): El libro de las Matemáticas. Librero, Kerkdriel, Holanda.